Savoir sans Frontières

知识无边界

几何王国探险

Jean-Pierre Petit

让-皮艾尔　博笛

昂赛姆漫游科学王国

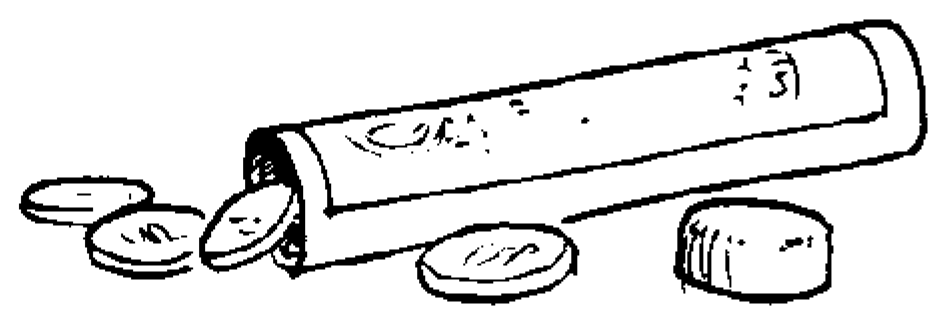
http://www.savoir-sans-frontieres.com

注意

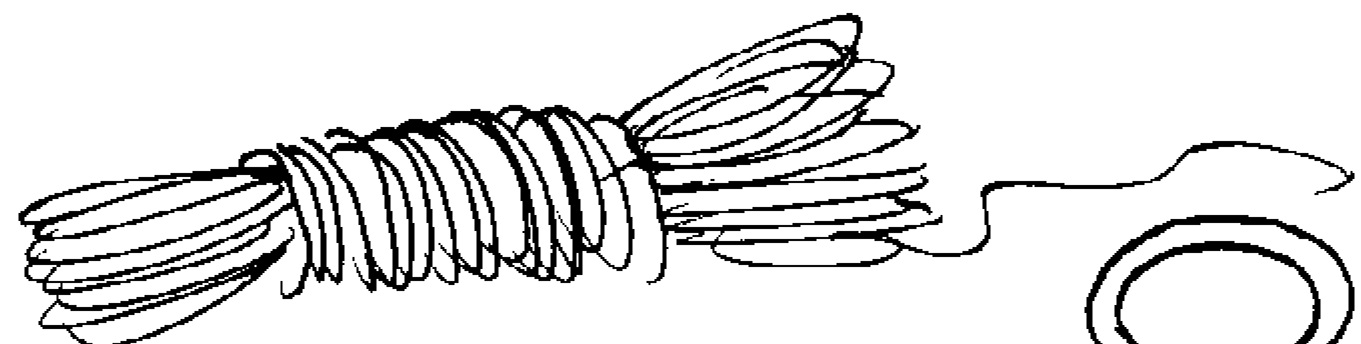
本书不是一份条约，也不是一本数学课本，只是昂赛姆漫游科学王国的故事。这一回，他来到了奇妙的几何王国。又一次令人兴奋的旅行即将开始，让我们一起跟上他吧！

出发之前，请带上以下物品：

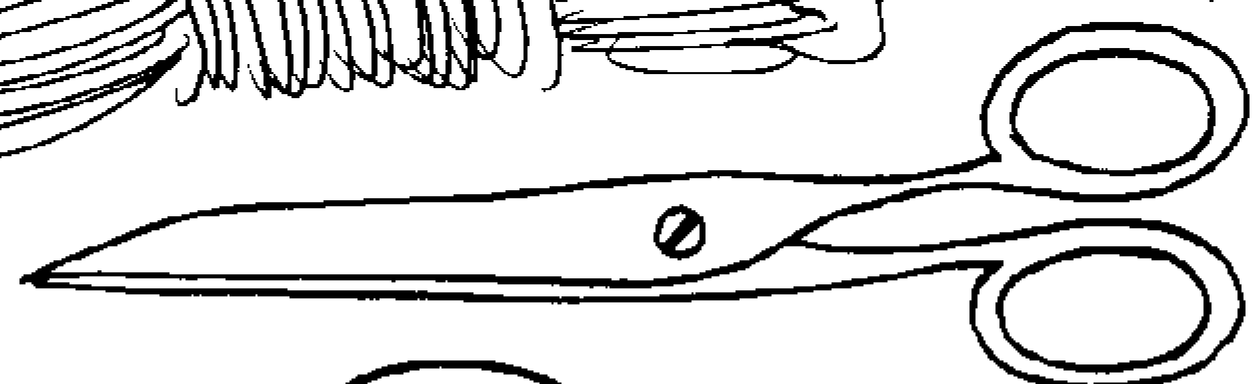
* 阿司匹林药片



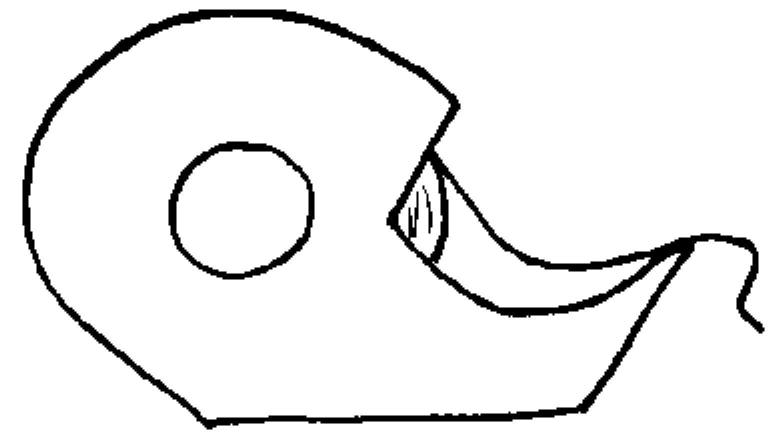
* 细绳



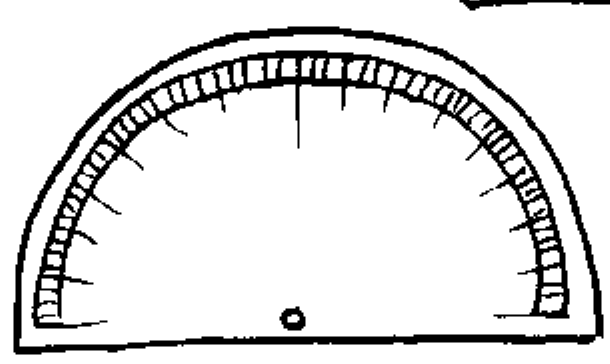
* 剪刀



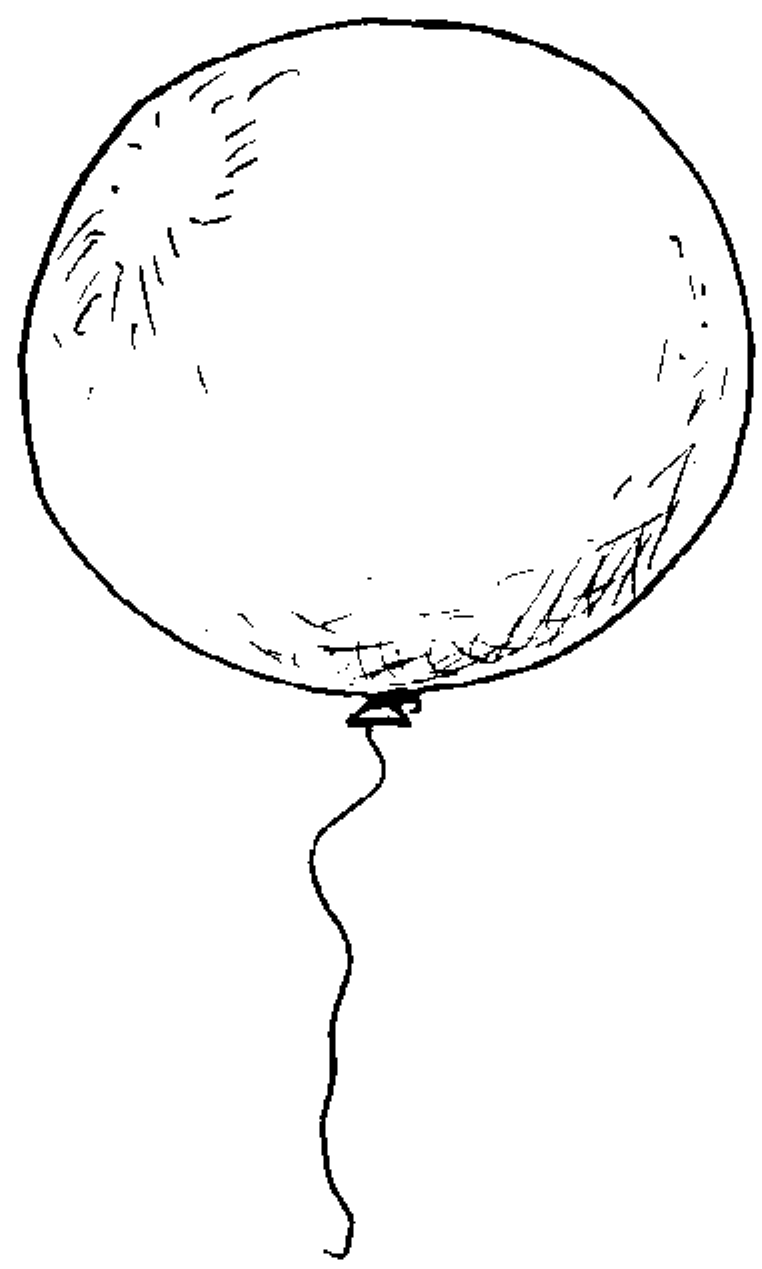
* 透明胶带



* 量角器



* 气球，越圆越好

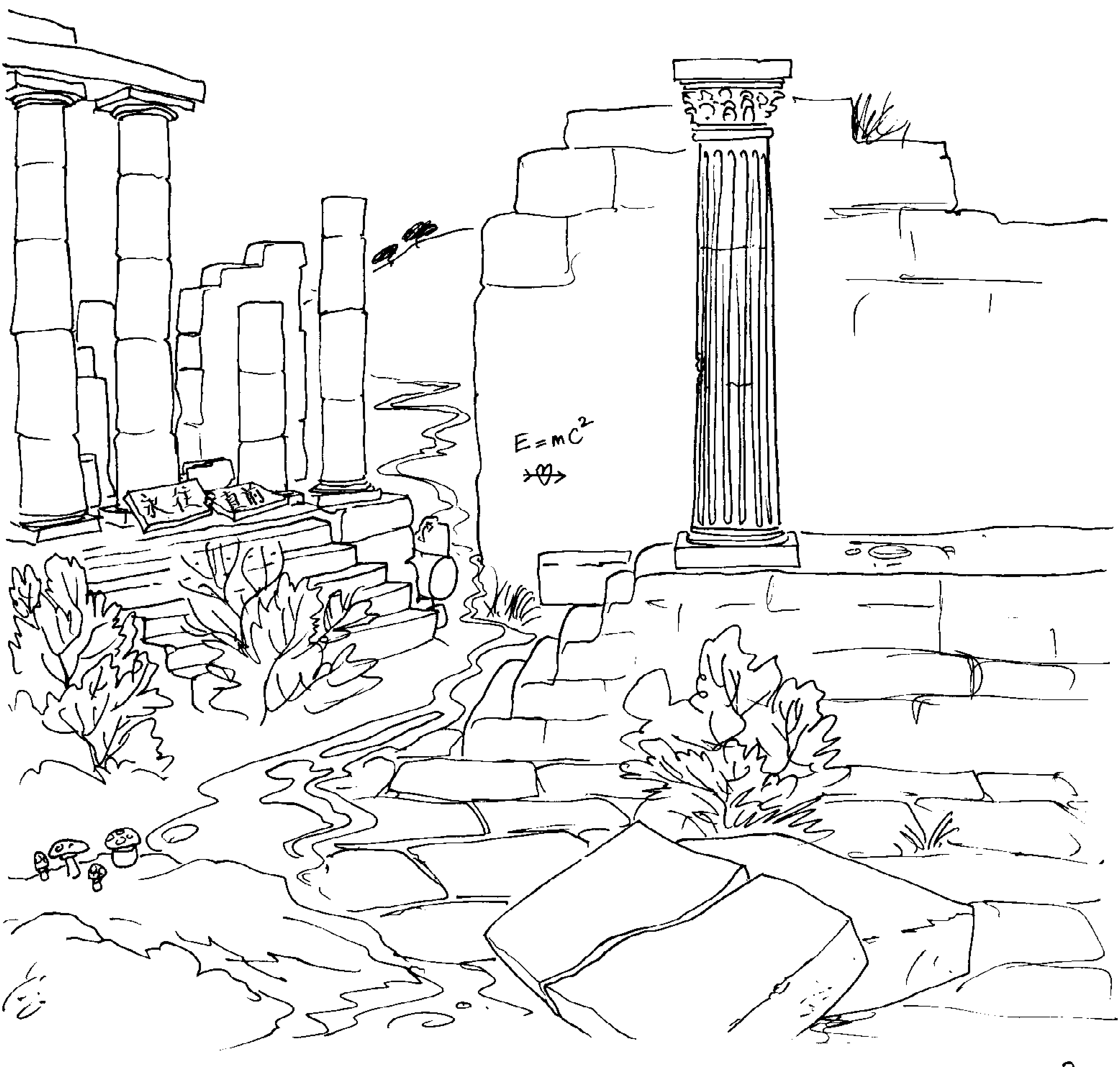


祝大家一路顺风！

公元前三世纪，欧几里德公司在亚历山大诞生了。整整两千两百年间，公司生意兴隆，他们的产品深受消费者欢迎，市场日渐繁荣，成为享有盛名的权威名牌。

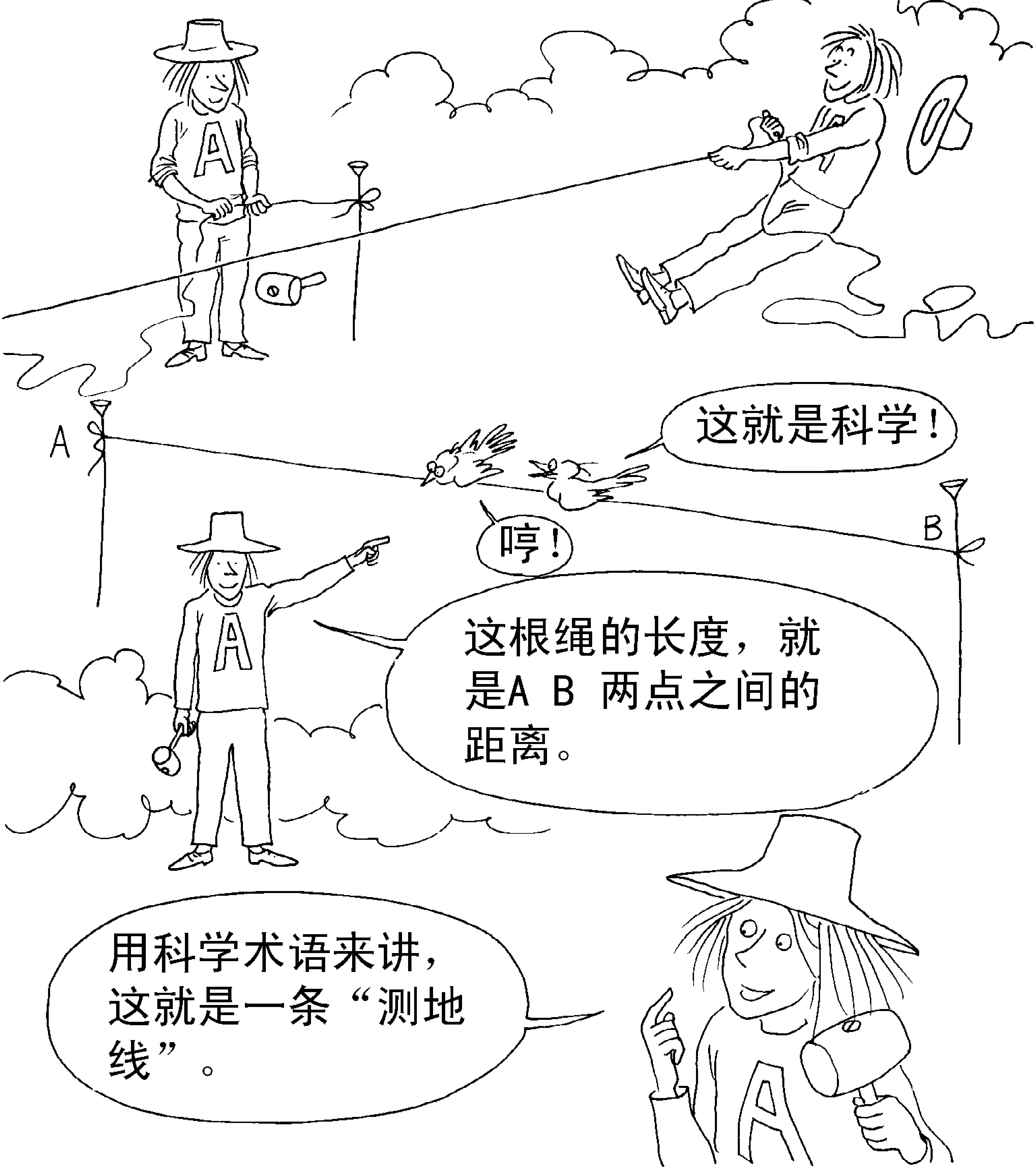
但是，渐渐地，顾客的口味开始变了。有些好奇的顾客在做了一些试验之后，就对这个牌子产生怀疑：“难道‘欧几里德®’真的是这世上最好的吗？”

以下就是其中一位顾客，也就是我们的昂赛姆的故事……



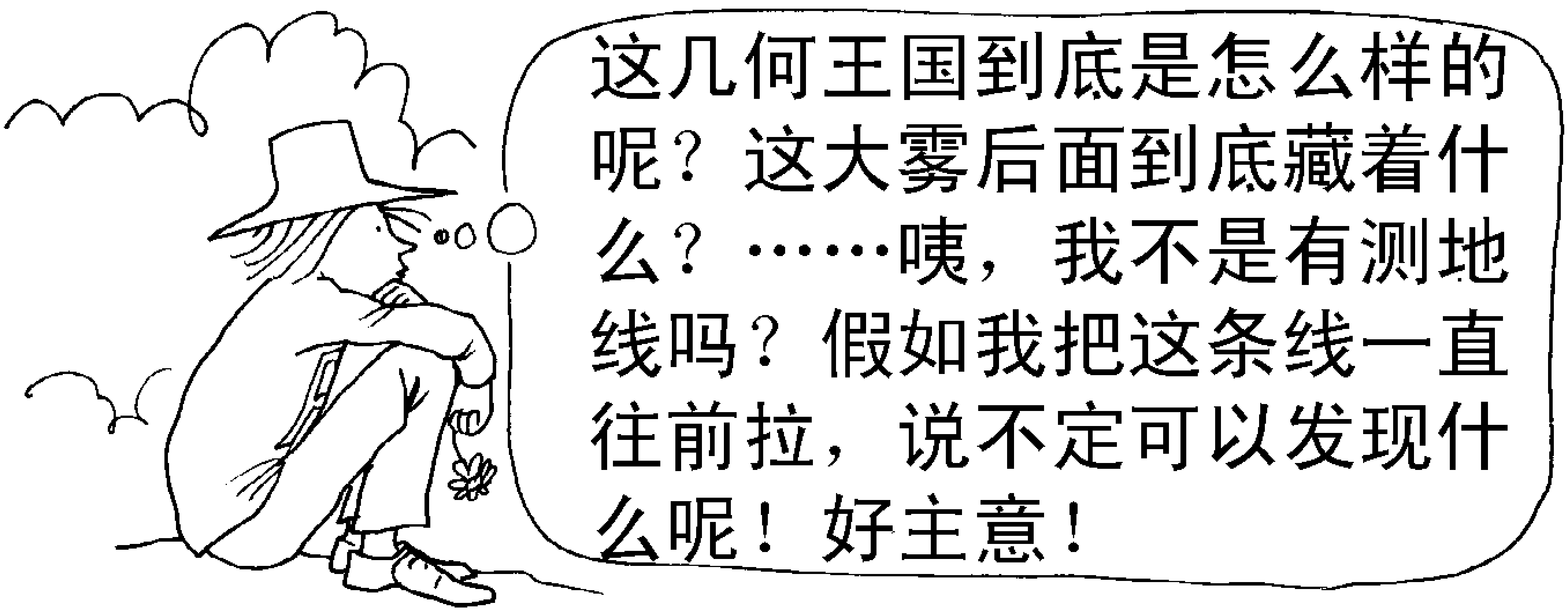
序言

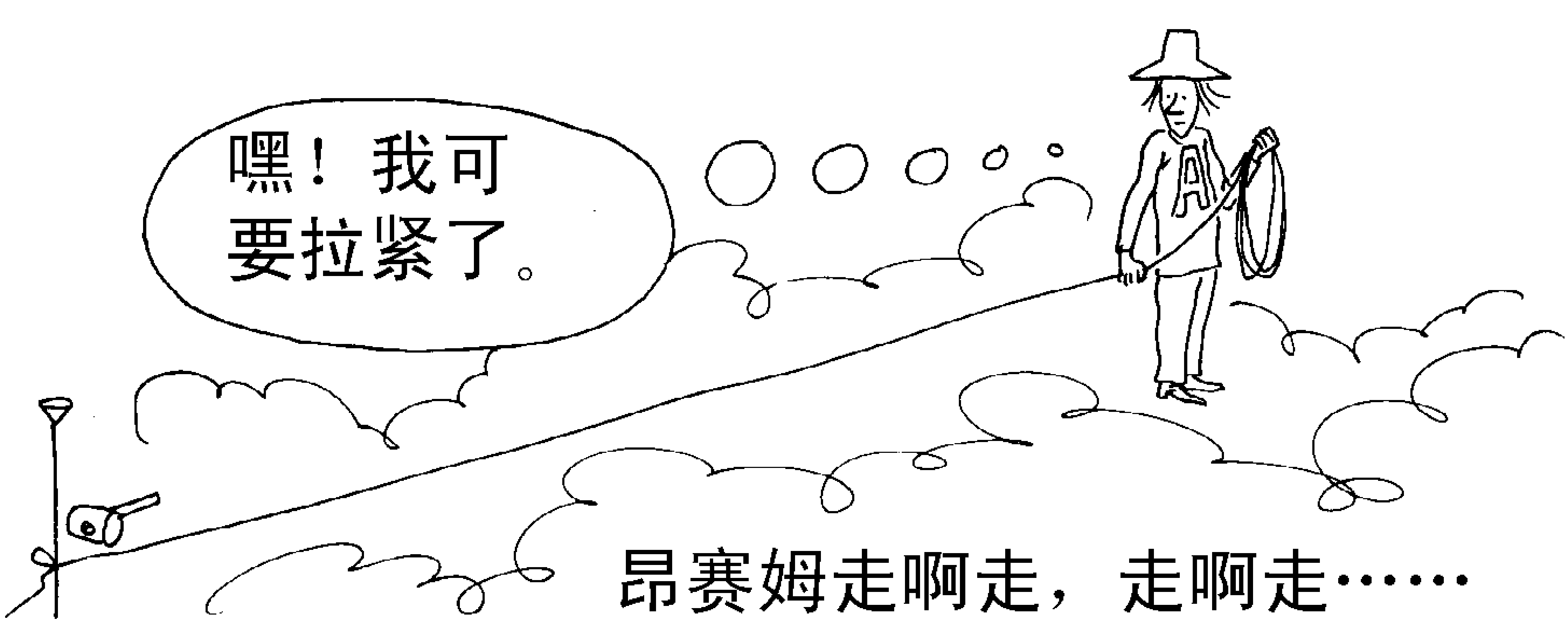
一天，昂赛姆试着把一根细绳拉紧，然后把它拴在两个小木桩上。



用三根拉紧的细绳，
也就是三根测地线，

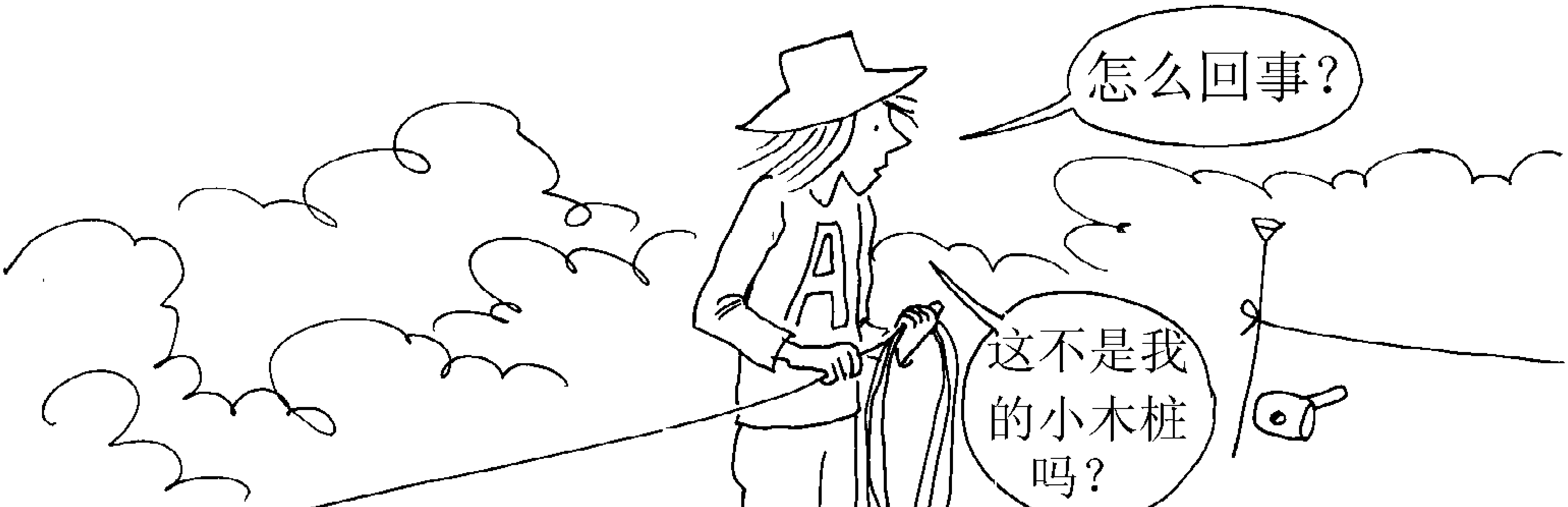
几何王国到处云雾缭绕，充满神秘。





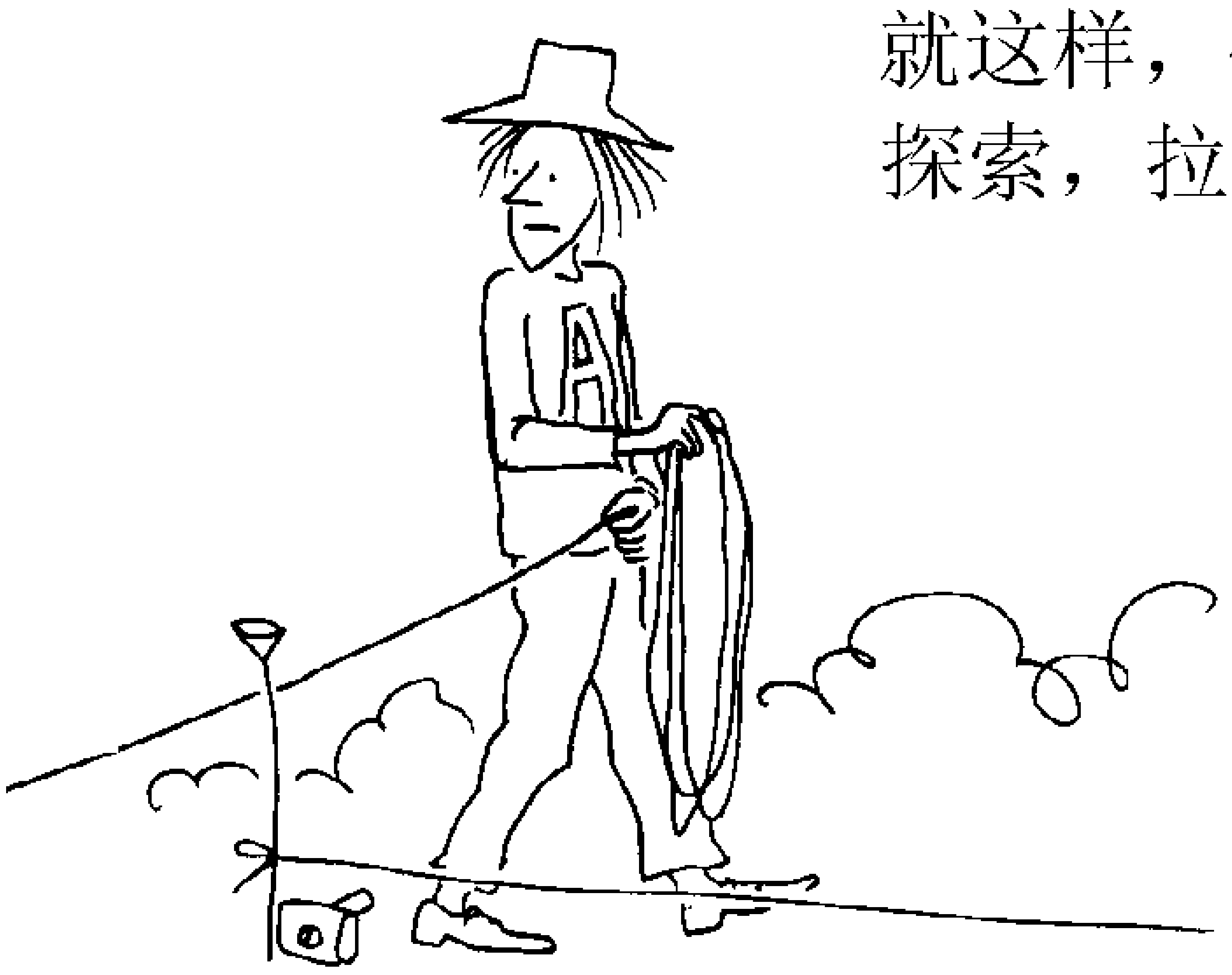
昂赛姆走啊走，走啊走……他就这样走了很久很久。在他后面，这根测地线也被越拉越长。而且，它是那么直，所以昂赛姆就只管放心地往前走。就这样，他拉起了一条完美的“测地线”。

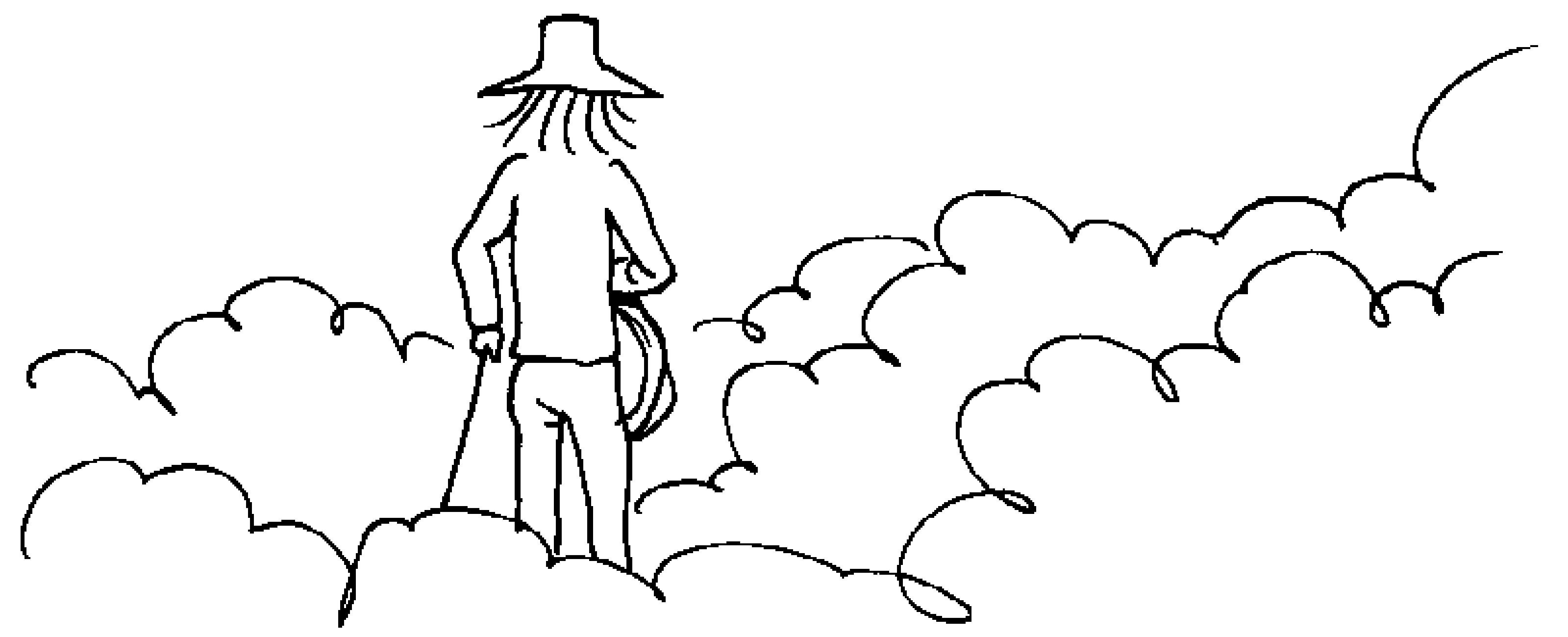
正所谓福不双至，祸不单行……



昂赛姆手里拿着这根测地线，决定继续往前走，想把这件事弄清楚。

就这样，他满怀好奇心，意志坚定地继续他的探索，拉紧测地线，勇往直前。

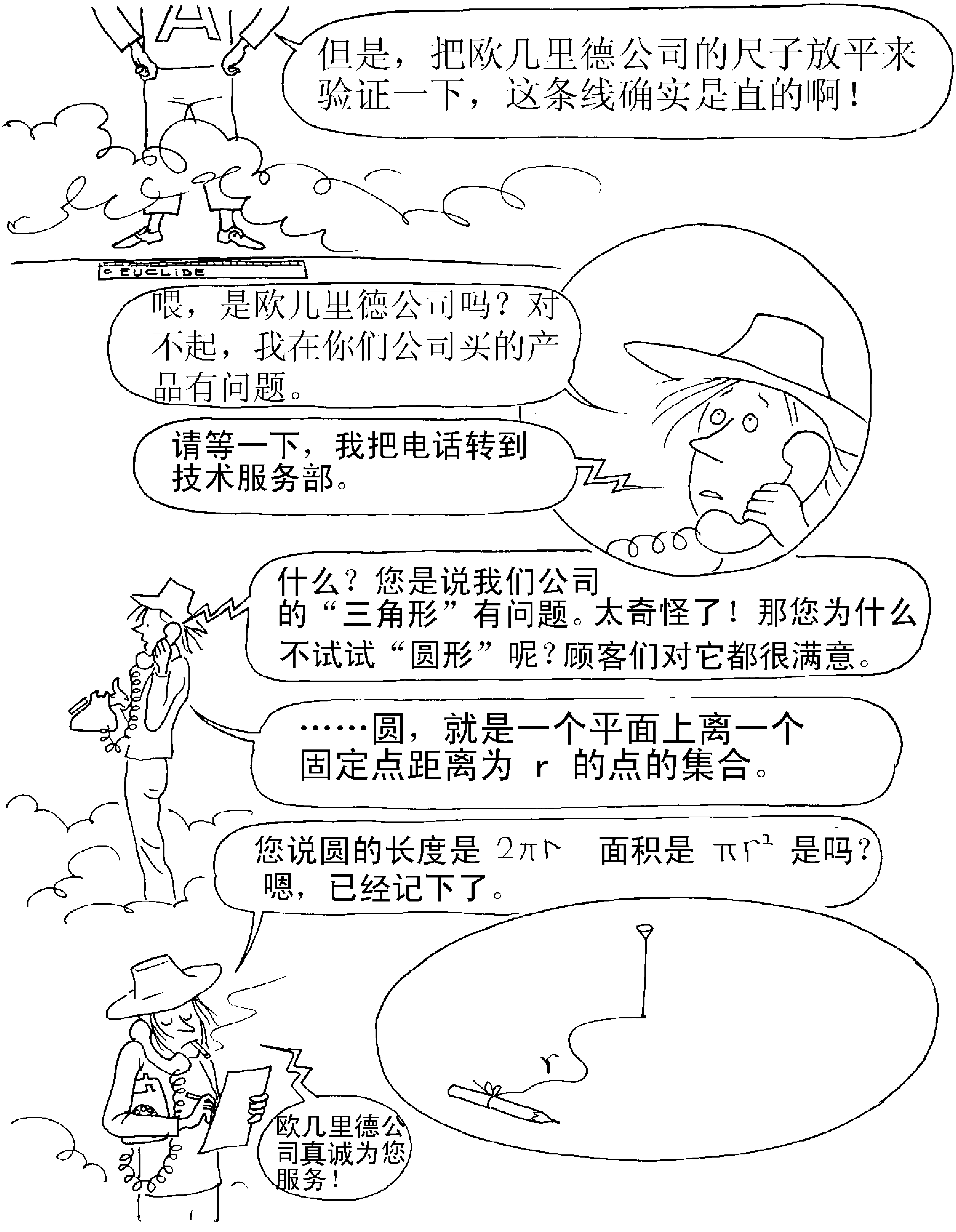




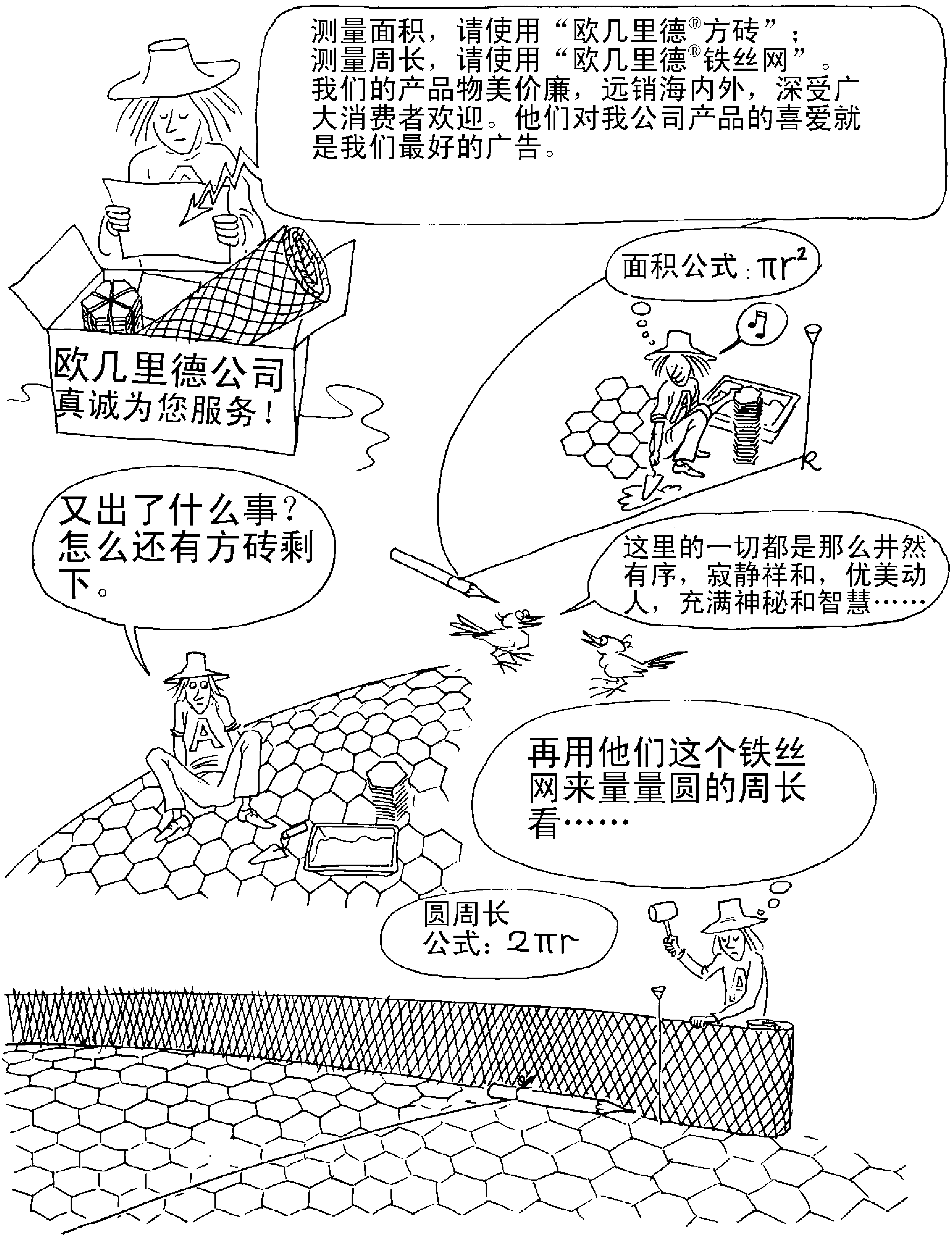
这些直线开始互相重合在一起。

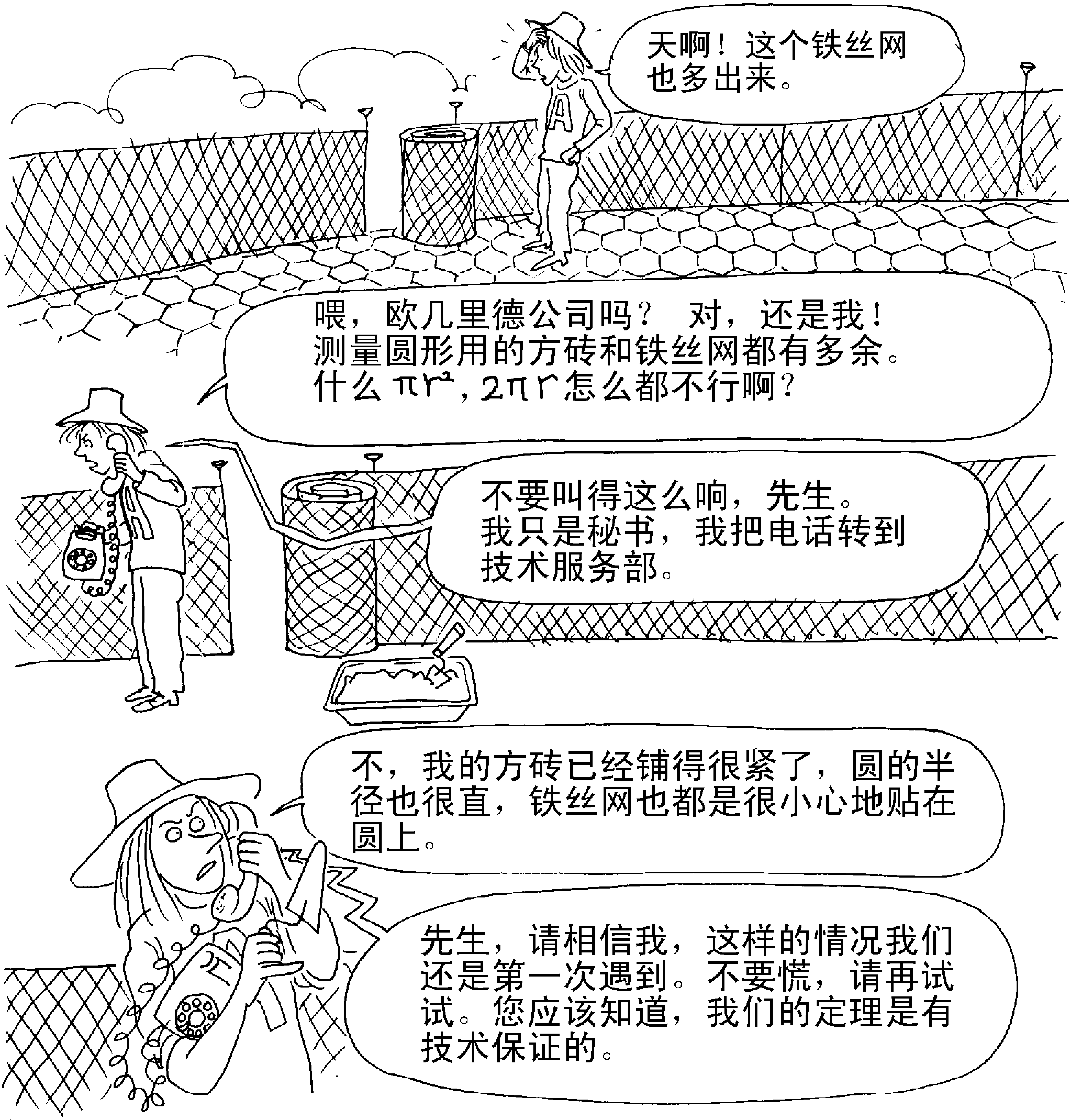
天啊！

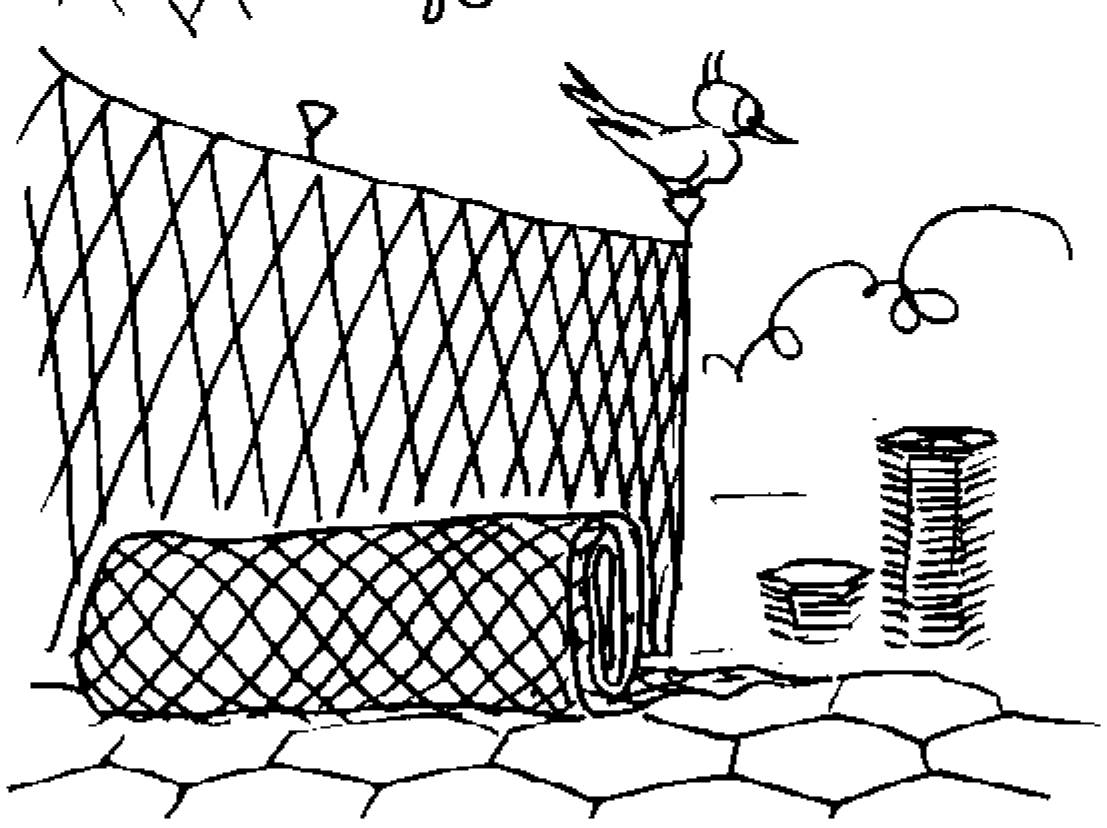

? ?
? ? ? ? ?
? ? ? ?
让我们来试试欧几里德公司的定理吧！根据这上面写的，假如我用三根等长的测地线做一个“等边三角形”，那么每个顶角度数就为60°
B
60
A
60
60
C
∠A+∠B+∠C
=180°
马上试试看！
科学战胜一切！
A
B
A
这就是顶点B，接下来只要再拉两根细绳，就可以找到第三个顶点了。
B
科学好神奇啊！
天啊！这三个角大小倒是相等，但怎么度数都大于60° 呢？
有问题吗？
A
C
三顶角总和怎么大于180°？
欧几里德
欧几里德
几何学
欧几里德



但是，把欧几里德公司的尺子放平来验证一下，这条线确实是直的啊！
EUCLIDE
喂，是欧几里德公司吗？对不起，我在你们公司买的产品有问题。
请等一下，我把电话转到技术服务部。
什么？您是说我们公司的“三角形”有问题。太奇怪了！那您为什么不试试“圆形”呢？顾客们对它都很满意。
……圆，就是一个平面上离一个固定点距离为 r 的点的集合。
您说圆的长度是 $2\pi r$ 面积是 πr^2 是吗？嗯，已经记下了。
r
欧几里德公司真诚为您服务！


测量面积，请使用“欧几里德®方砖”；
测量周长，请使用“欧几里德®铁丝网”。
我们的产品物美价廉，远销海内外，深受广大消费者欢迎。他们对我公司产品的喜爱就是我们最好的广告。
欧几里德公司
真诚为您服务！
面积公式：πr²
又出了什么事？怎么还有方砖剩下。
这里的一切都是那么井然有序，寂静祥和，优美动人，充满神秘和智慧……
再用他们这个铁丝网来量量圆的周长看……
圆周长
公式：2πr



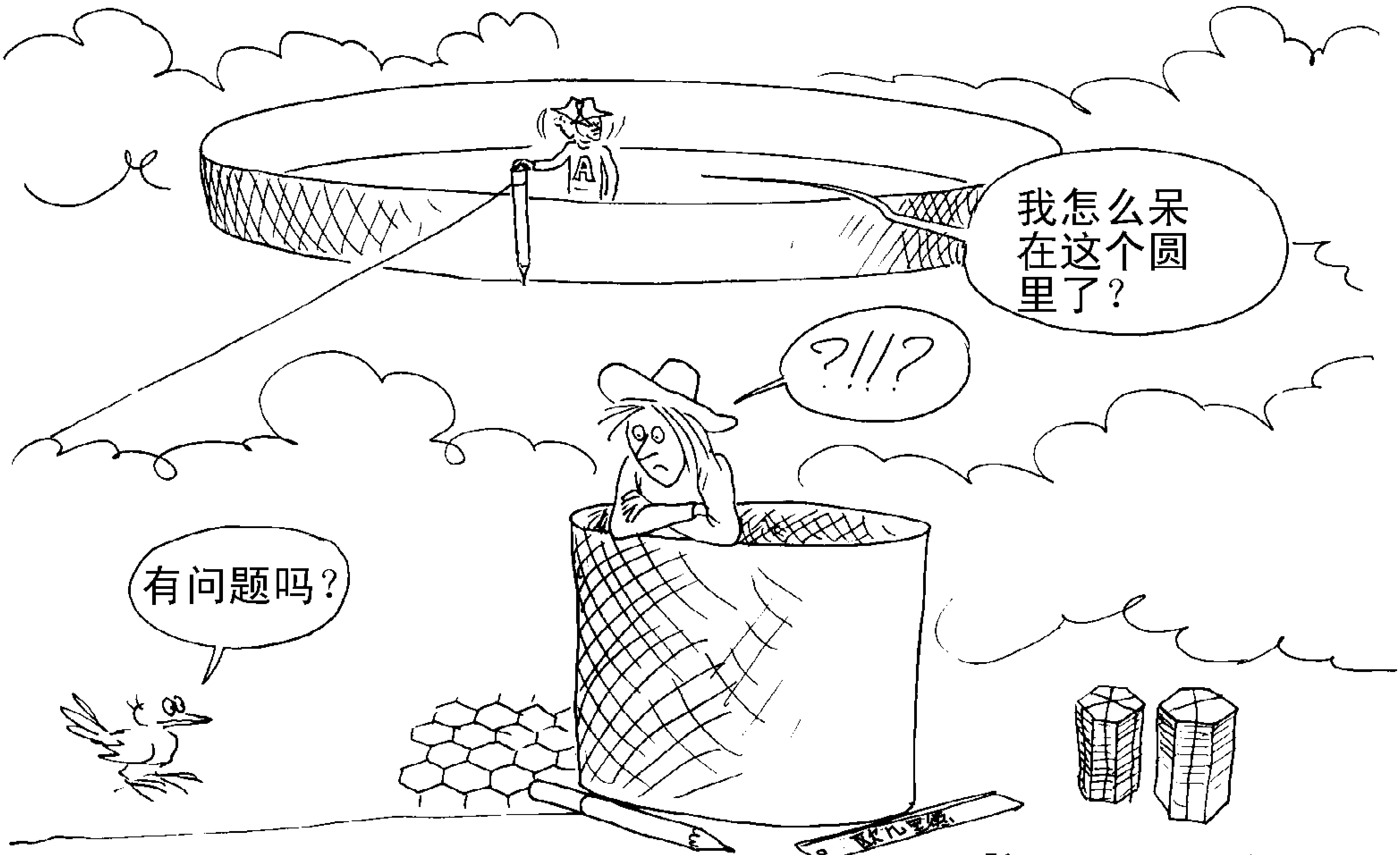


就这样，昂赛姆又画了几个圆，
试着把半径 r 增大……

但是，半径越大，剩余的方砖和
铁丝网也越多。

怎么回事，现在我有36%的铁丝网和19%的方砖多余，而且我的圆也变成了一条直线。
天啊！我不是见鬼了吧？
从空间里看，我的尺子确实是直的啊！
接着，昂赛姆又增大了半径，这回……
我的圆开始往外弯曲了。
现在，半径增加，周长开始减小了。

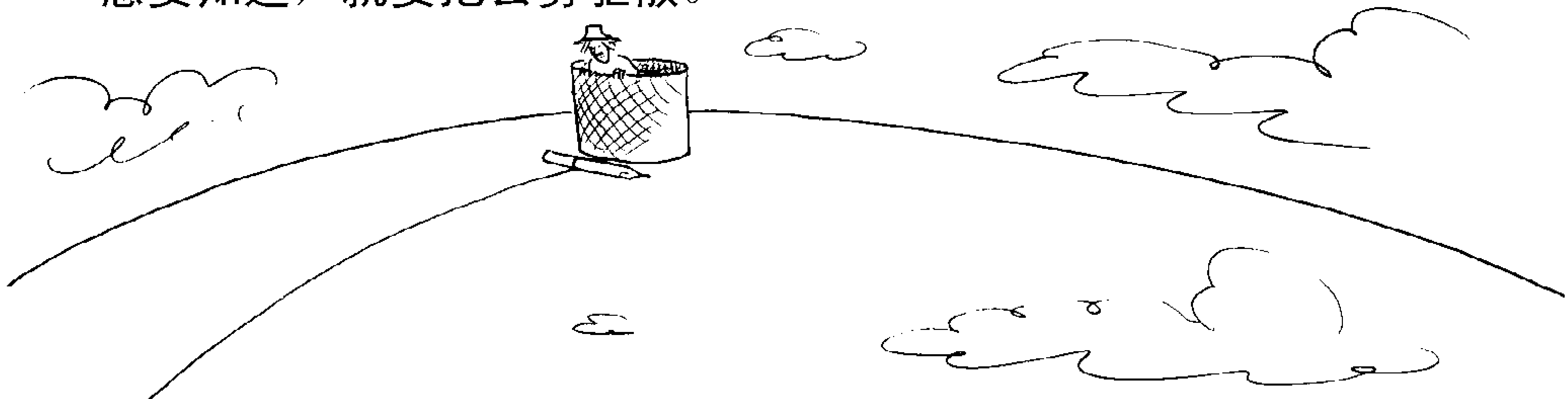
最后……



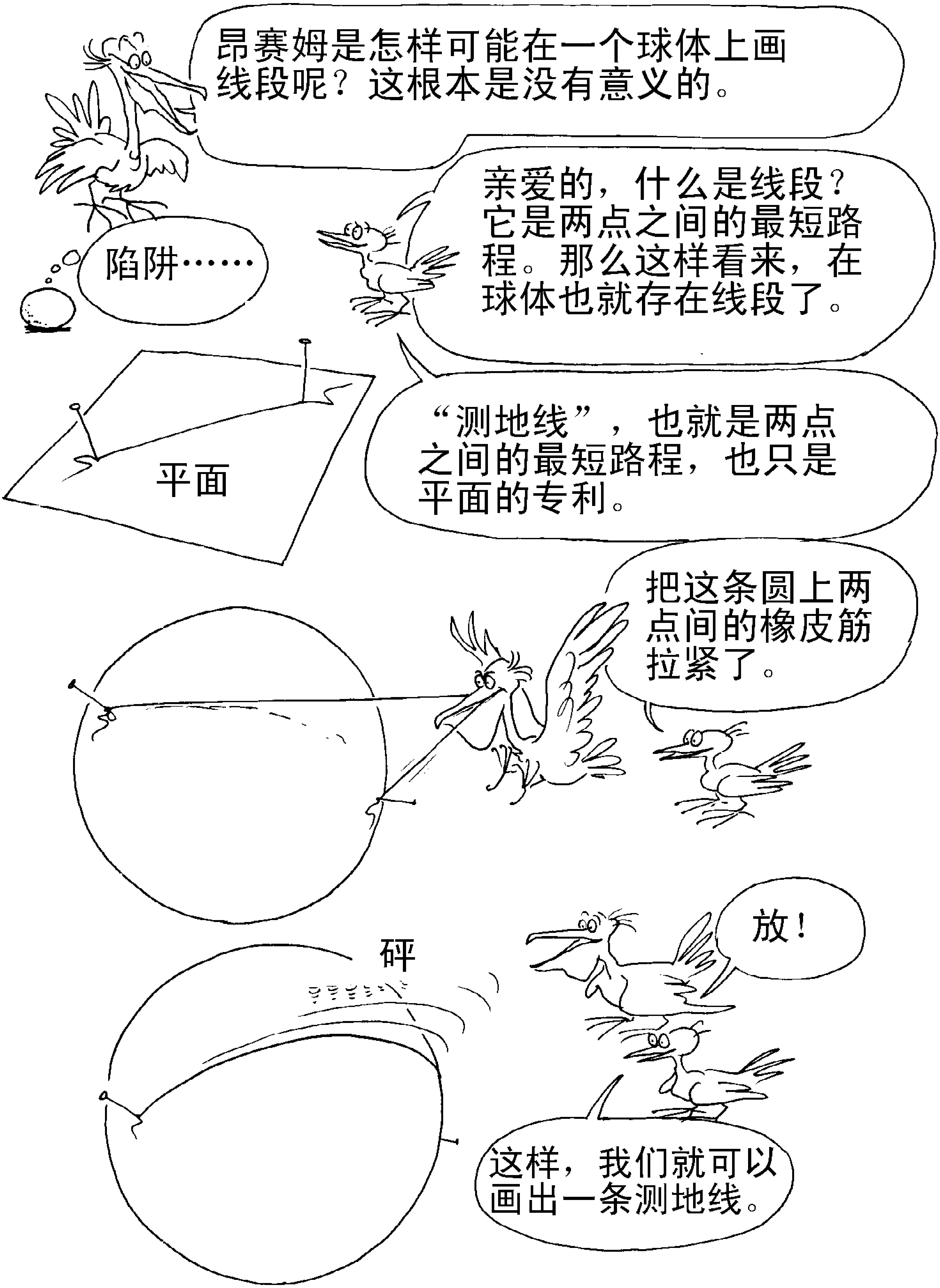
球体城

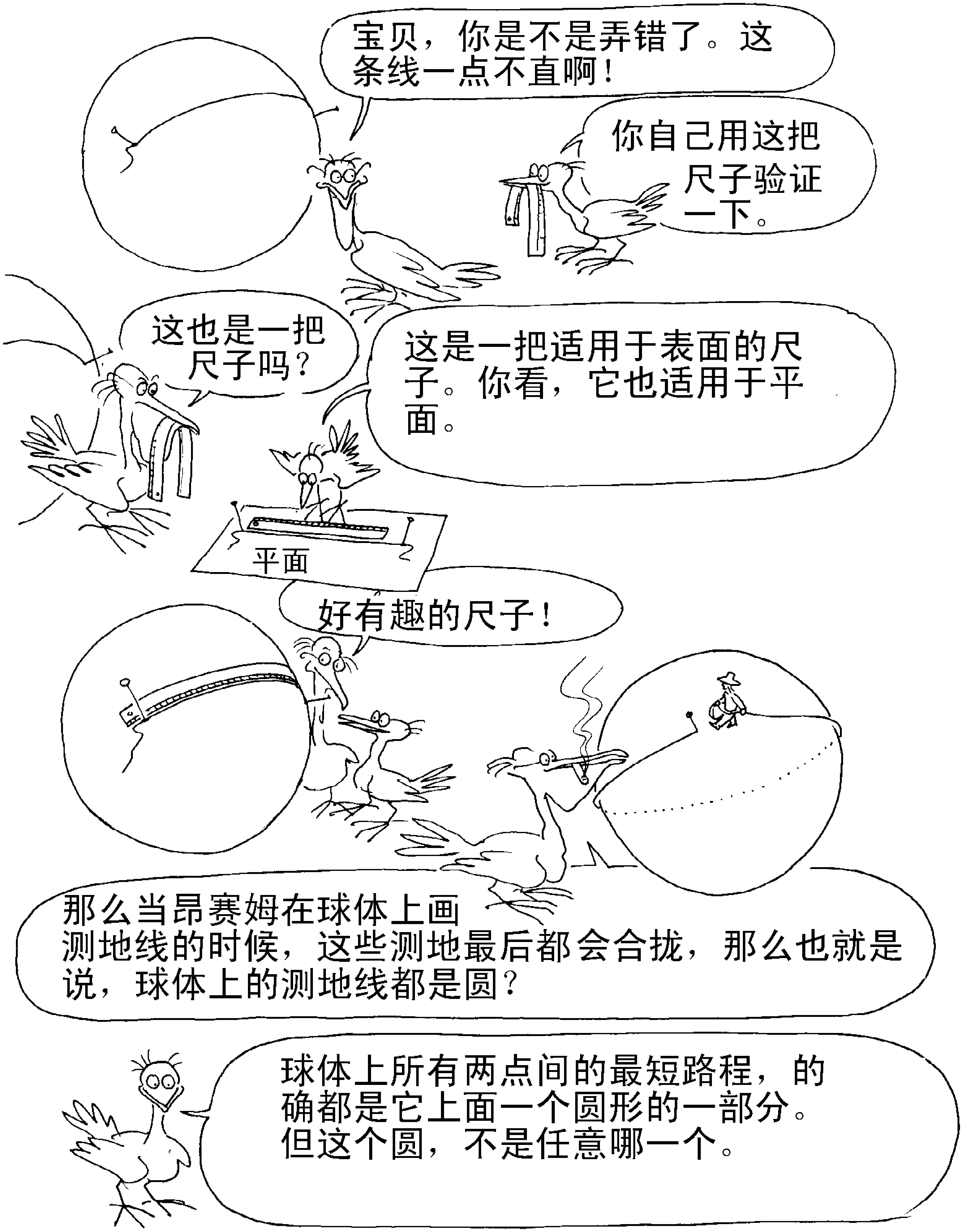
到底是怎么回事？

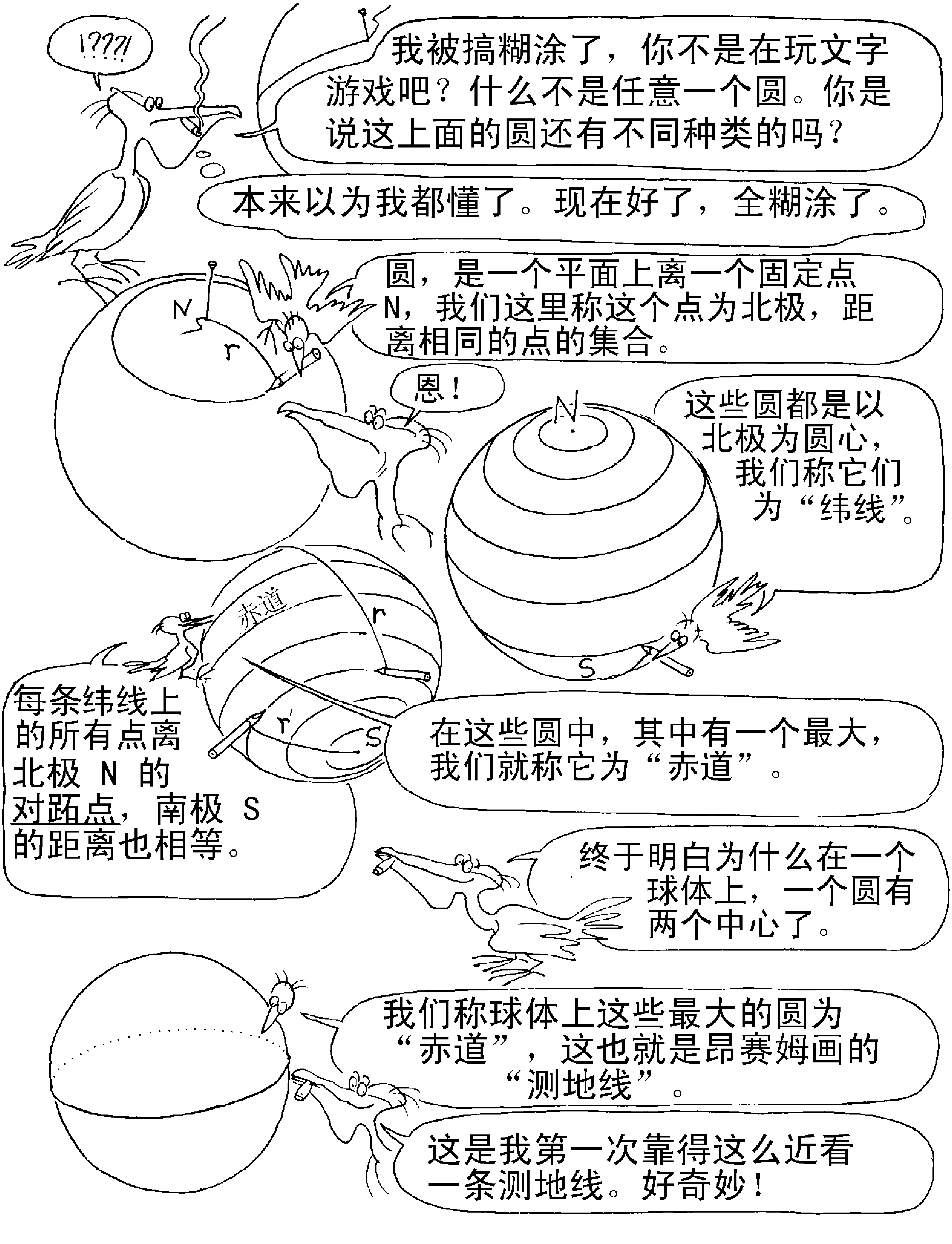
想要知道，就要把云雾驱散。

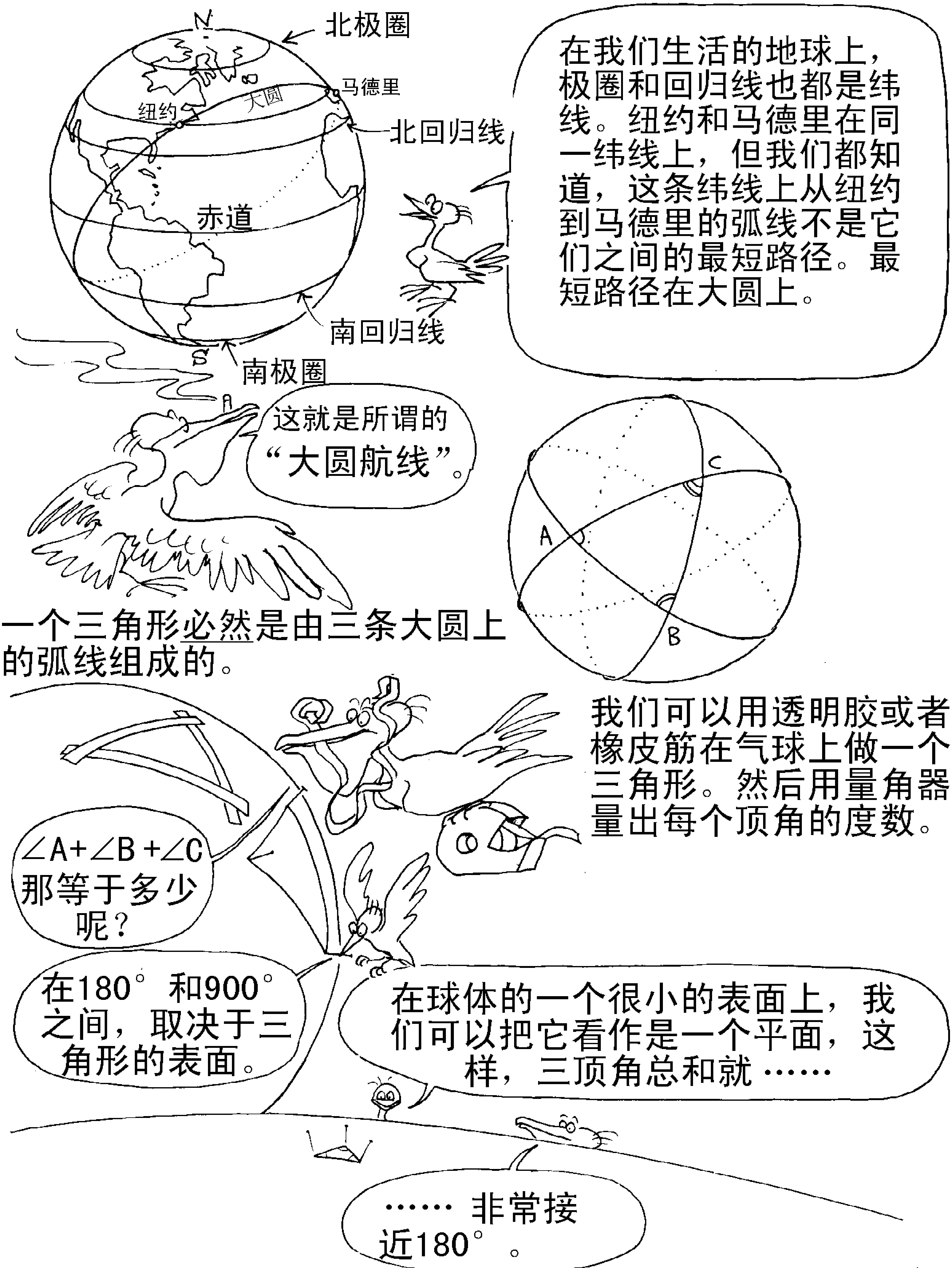


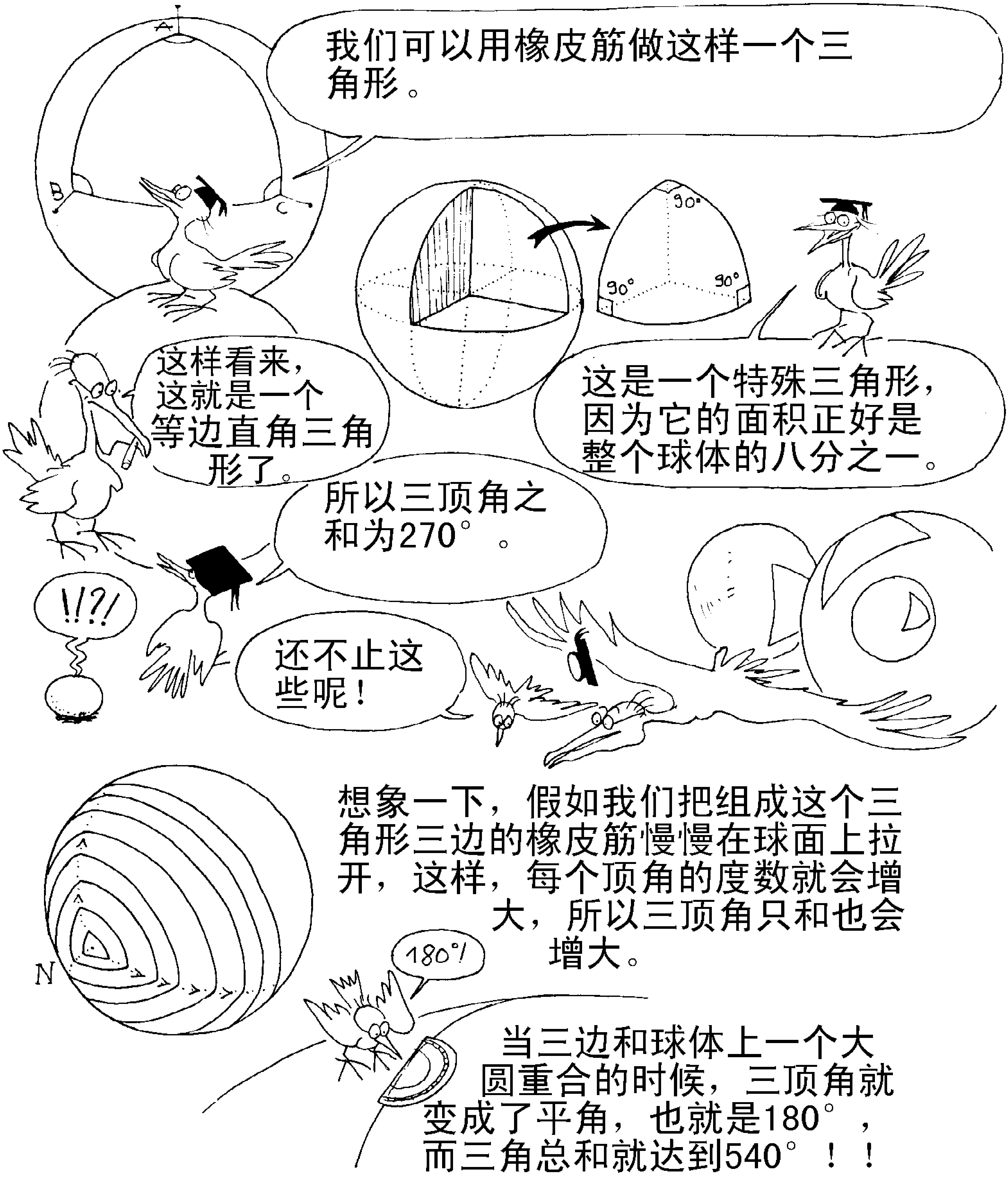
昂赛姆马上明白了：他在一个球体上，而他用的尺子，却是适用于“平面几何”的。


昂赛姆是怎样可能在一个球体上画线段呢？这根本是没有意义的。
陷阱……
亲爱的，什么是线段？它是两点之间的最短路程。那么这样看来，在球体也就存在线段了。
平面
“测地线”，也就是两点之间的最短路程，也只是平面的专利。
把这条圆上两点间的橡皮筋拉紧了。
放！
砰
这样，我们就可以画出一条测地线。

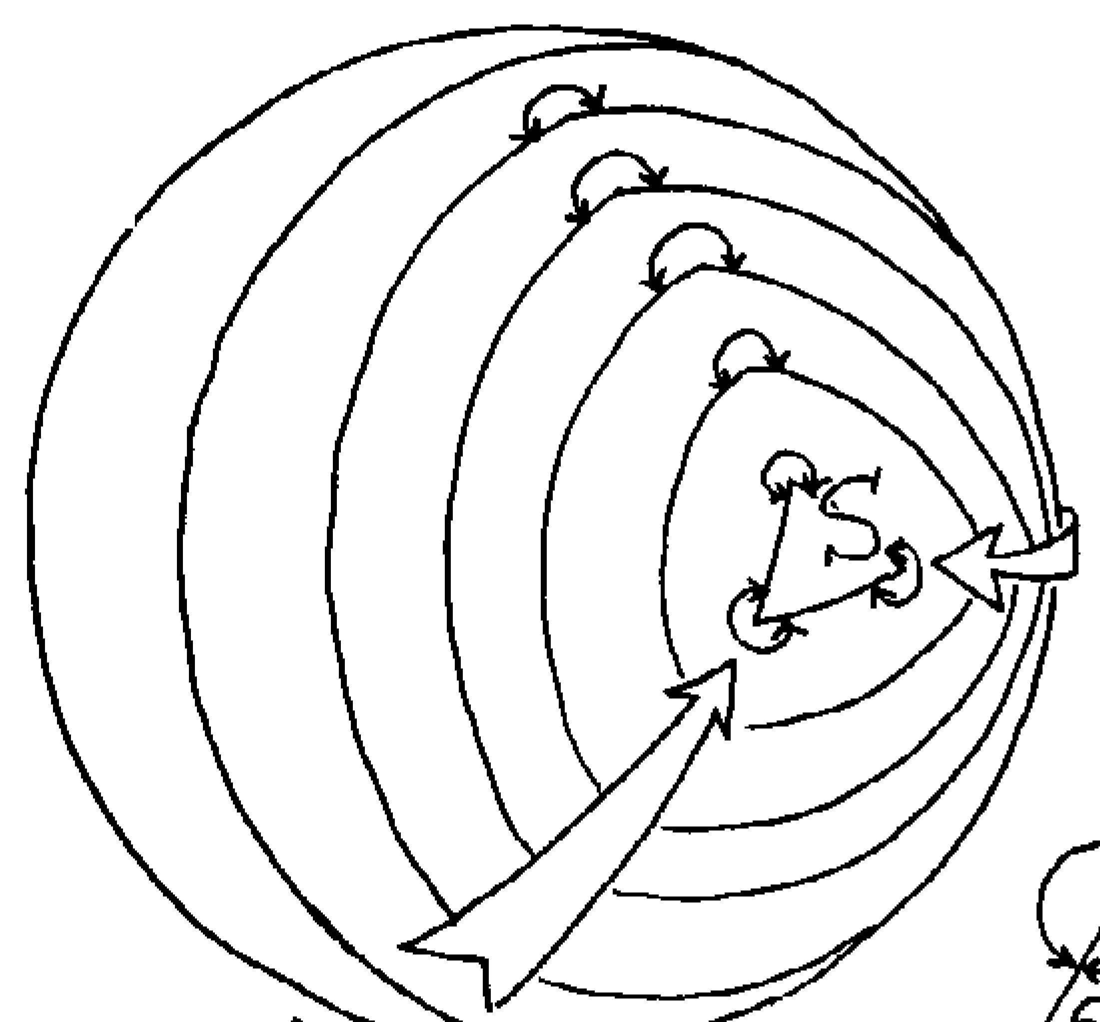

宝贝，你是不是弄错了。这条线一点不直啊！
你自己用这把尺子验证一下。
这也是一把尺子吗？
这是一把适用于表面的尺子。你看，它也适用于平面。
平面
好有趣的尺子！
那么当昂赛姆在球体上画测地线的时候，这些测地最后都会合拢，那么也就是说，球体上的测地线都是圆？
球体上所有两点间的最短路程，的确都是它上面一个圆形的一部分。但这个圆，不是任意哪一个。

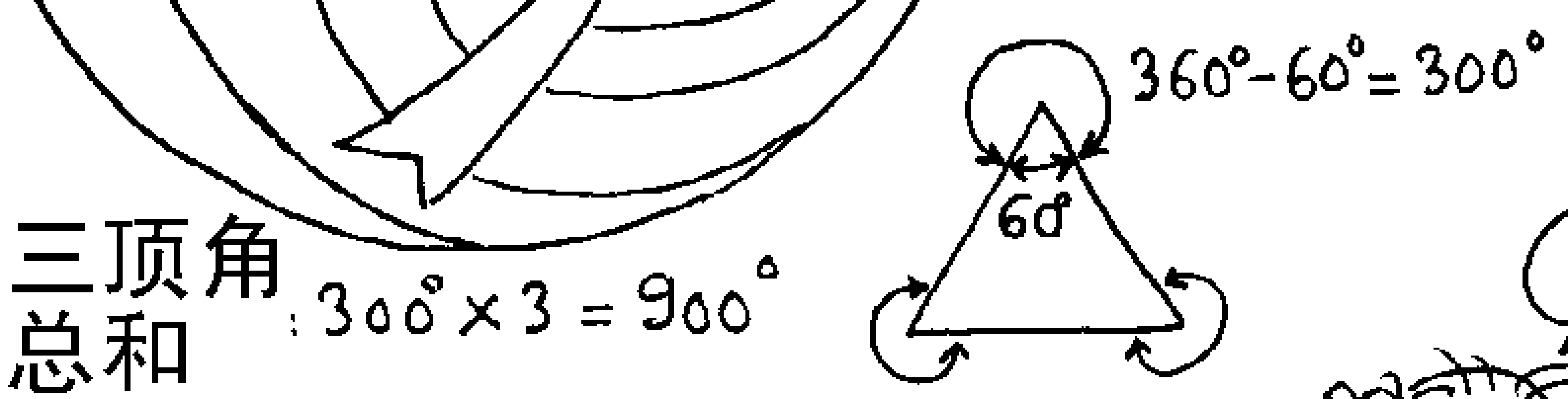

!???!
我被搞糊涂了，你不是在玩文字游戏吧？什么不是任意一个圆。你是说这上面的圆还有不同种类的吗？
本来以为我都懂了。现在好了，全糊涂了。
N
r
圆，是一个平面上离一个固定点N，我们这里称这个点为北极，距离相同的点的集合。
恩！
N
这些圆都是以北极为圆心，我们称它们为“纬线”。
赤道
r
S
r'
S
每条纬线上的所有点离北极 N 的对跖点，南极 S 的距离也相等。
在这些圆中，其中有一个最大，我们就称它为“赤道”。
终于明白为什么在一个球体上，一个圆有两个中心了。
我们称球体上这些最大的圆为“赤道”，这也就是昂赛姆画的“测地线”。
这是我第一次靠得这么近看一条测地线。好奇妙！

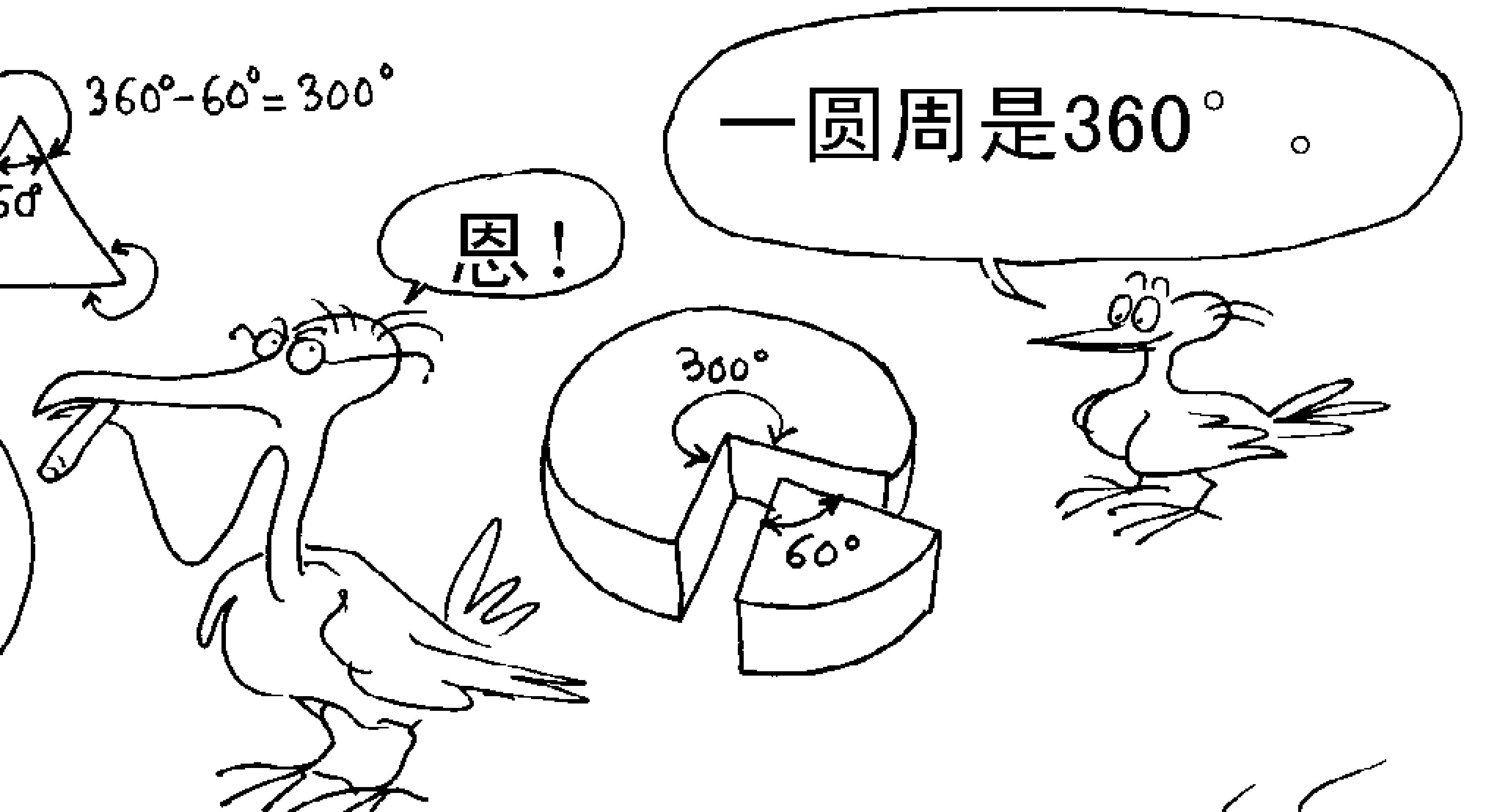

N
北极圈
马德里
大圆
纽约
北回归线
赤道
南回归线
S
南极圈
在我们生活的地球上，极圈和回归线也都是纬线。纽约和马德里在同一纬线上，但我们都知道，这条纬线上从纽约到马德里的弧线不是它们之间的最短路径。最短路径在大圆上。
这就是所谓的“大圆航线”。
C
A
B
一个三角形必然是由三条大圆上的弧线组成的。
我们可以用透明胶或者橡皮筋在气球上做一个三角形。然后用量角器量出每个顶角的度数。
∠A+∠B +∠C那等于多少呢？
在180° 和900° 之间，取决于三角形的表面。
在球体的一个很小的表面上，我们可以把它看作是一个平面，这样，三顶角总和就……
…… 非常接近180° 。


我们可以用橡皮筋做这样一个三角形。
A
B
C
90°
90°
90°
这样看来，这就是一个等边直角三角形了。
这是一个特殊三角形，因为它的面积正好是整个球体的八分之一。
所以三顶角之和为270°。
!!?!
还不止这些呢！
想象一下，假如我们把组成这个三角形三边的橡皮筋慢慢在球面上拉开，这样，每个顶角的度数就会增大，所以三顶角只和也会增大。
N
180°!
当三边和球体上一个大圆重合的时候，三顶角就变成了平角，也就是180°，而三角总和就达到540°！！

把三角形的三顶点继续往另一个半球上移动，那么这三个点就会向点 S ，也就是点 N 的对距点汇集。那么每个顶角度数就大于180°！更准确一点，接近点 S 时候，它们的度数将达到 360°-60°＝300°。





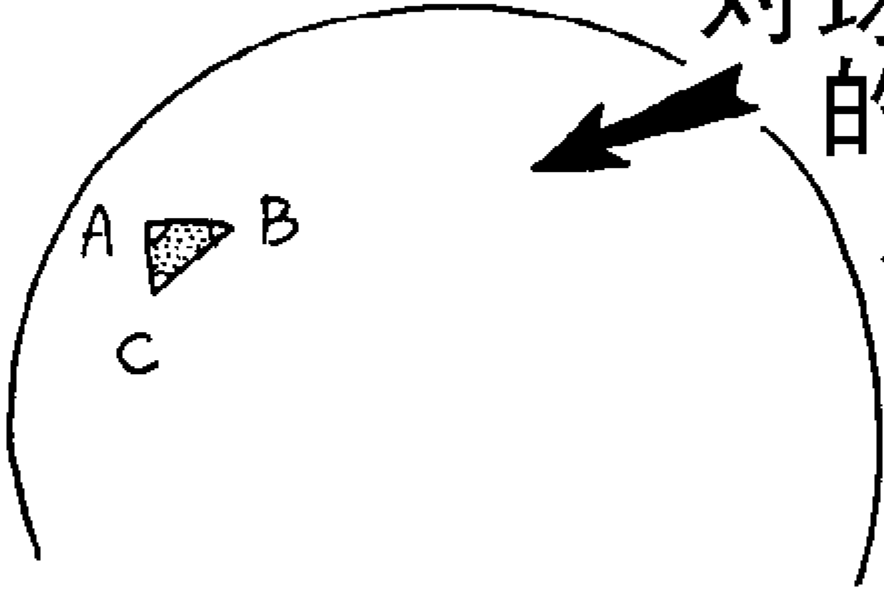


球体上的一个三角形，其三顶角之和在180°和900°之间。原来如此！

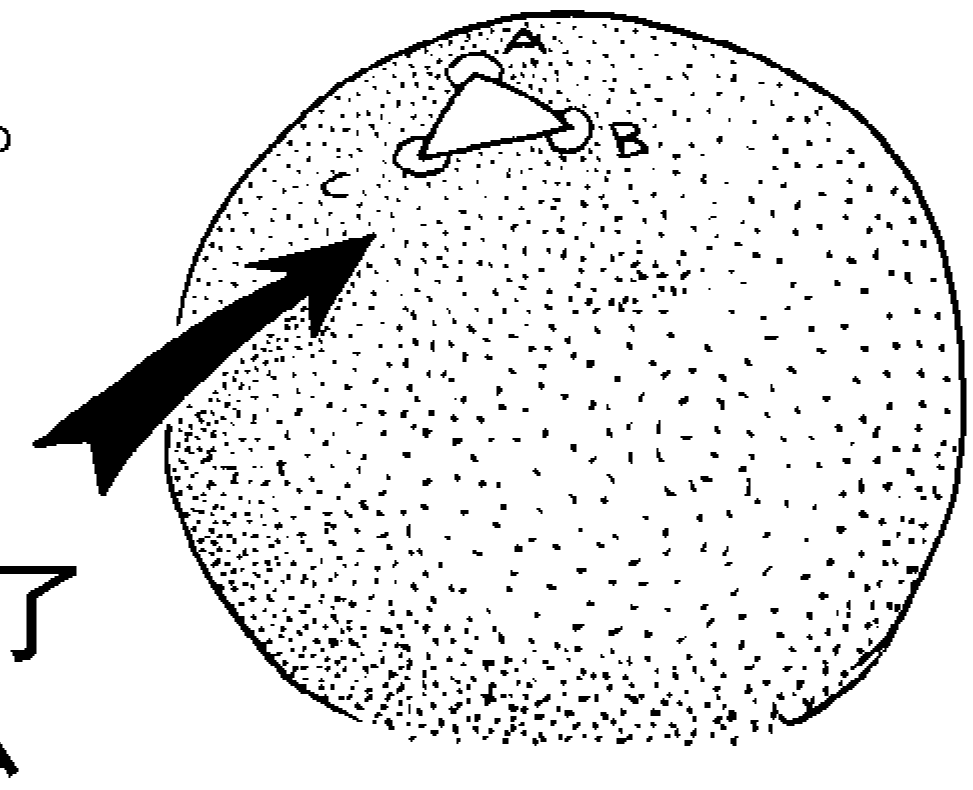
根据高斯的定理，球体上的一个三角形三顶角之和为：

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180\left(1 + \frac{A}{\pi \cdot R^2}\right)\text{度}$$

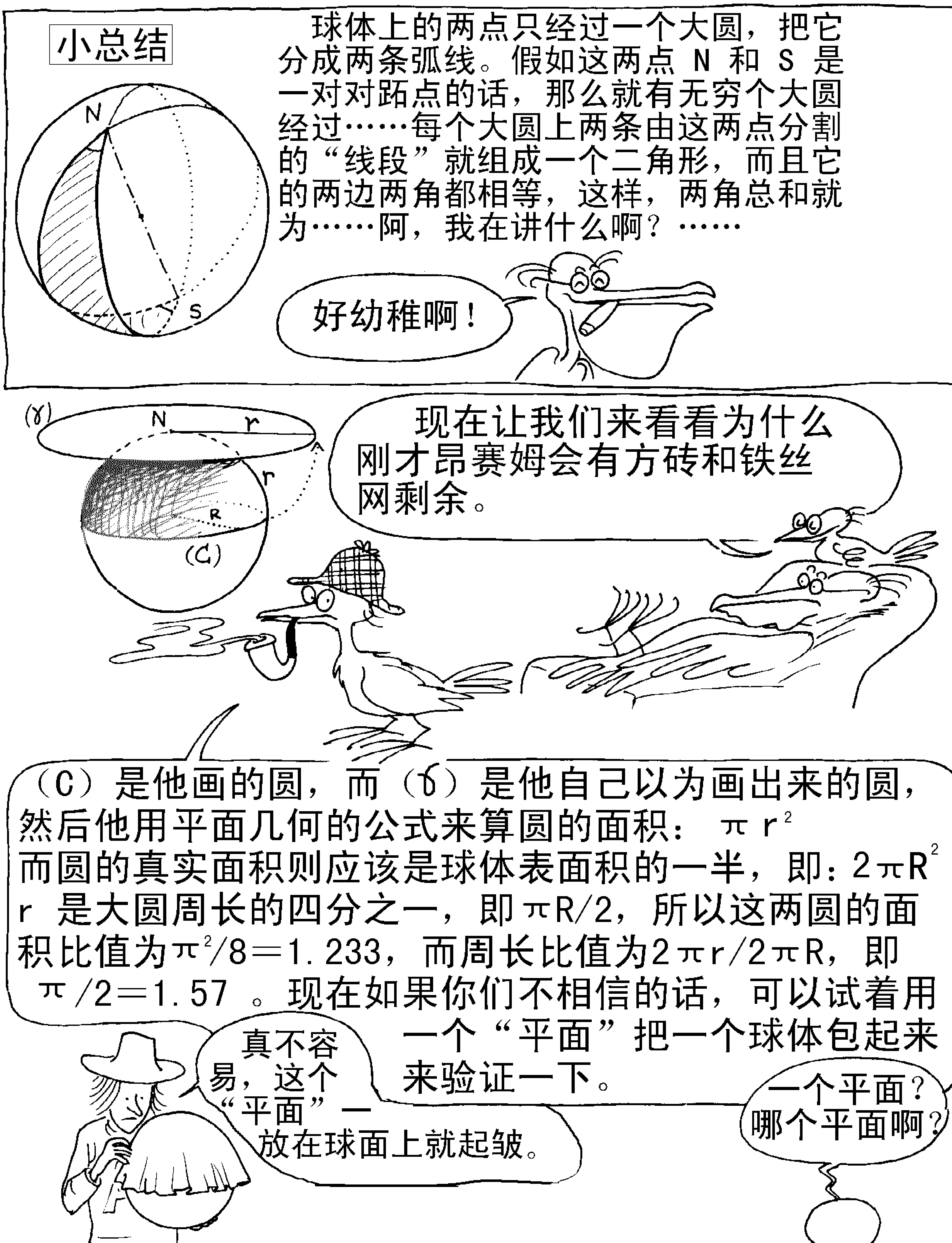
R 为球体的半径，A 为三角形面积。



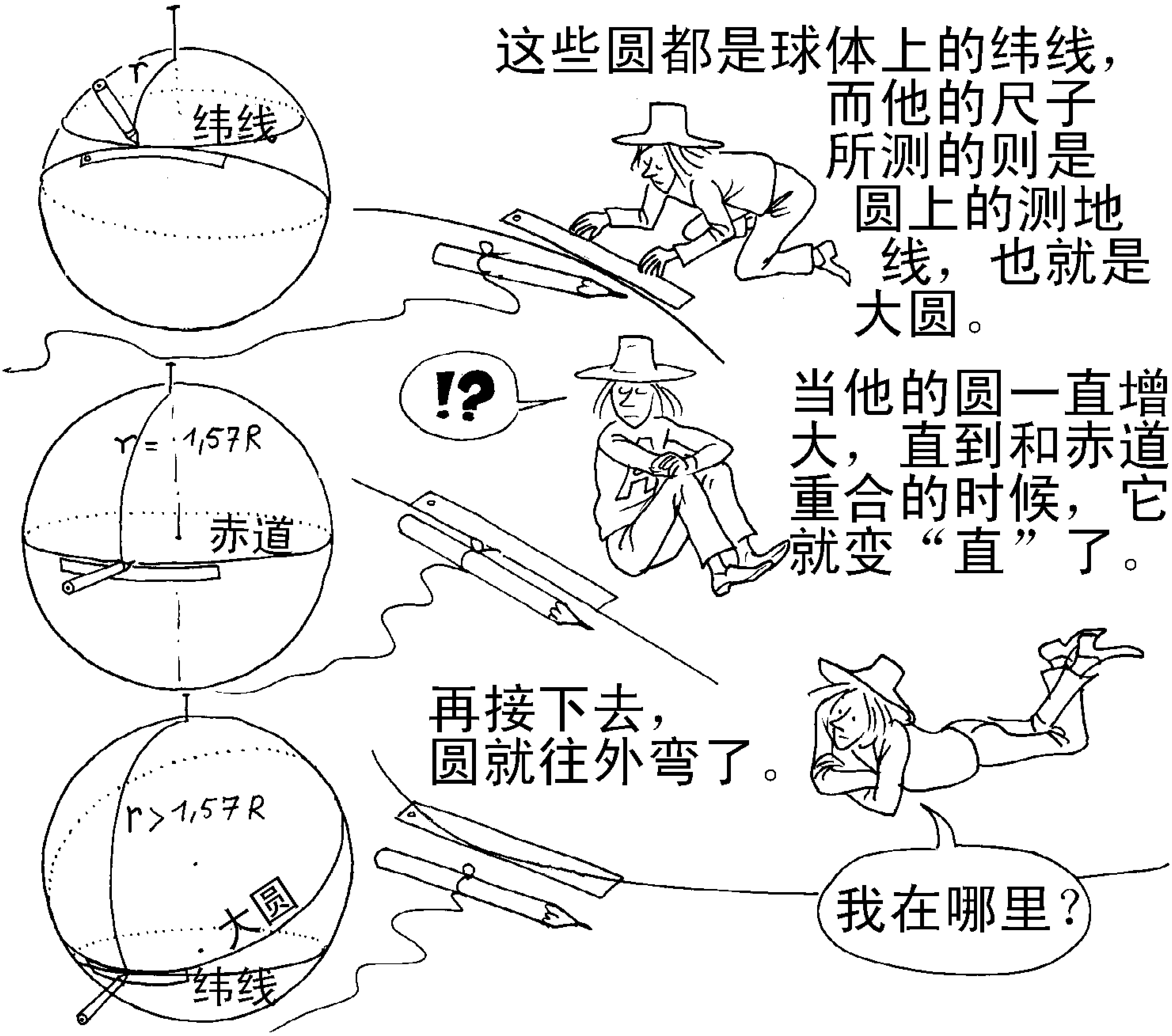
假如三角形的面积相对球体表面积而言非常小的话，我们就有 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ 也就是欧几里德公司的定理。



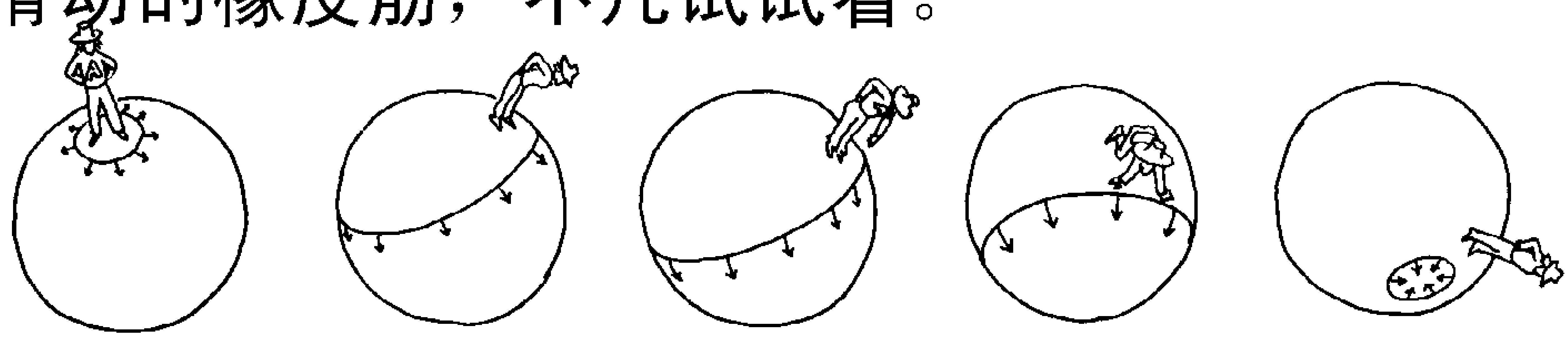
相反，假如三角形的表面几乎占了整个球面，也就是($4\pi \cdot R^2$)，那么三顶角之和就是 900° 了。


小总结
球体上的两点只经过一个大圆，把它分成两条弧线。假如这两点 N 和 S 是一对对跖点的话，那么就有无穷个大圆经过……每个大圆上两条由这两点分割的“线段”就组成一个二角形，而且它的两边两角都相等，这样，两角总和就为……阿，我在讲什么啊？……
N
S
好幼稚啊！
(γ)
N
r
r
R
(C)
现在让我们来看看为什么刚才昂赛姆会有方砖和铁丝网剩余。
（C）是他画的圆，而（γ）是他自己以为画出来的圆，然后他用平面几何的公式来算圆的面积：πr^2 而圆的真实面积则应该是球体表面积的一半，即：$2\pi R^2$ r 是大圆周长的四分之一，即$\pi R/2$，所以这两圆的面积比值为$\pi^2/8=1.233$，而周长比值为$2\pi r/2\pi R$，即$\pi/2=1.57$。现在如果你们不相信的话，可以试着用一个“平面”把一个球体包起来来验证一下。
真不容易，这个“平面”一放在球面上就起皱。
一个平面？哪个平面啊？

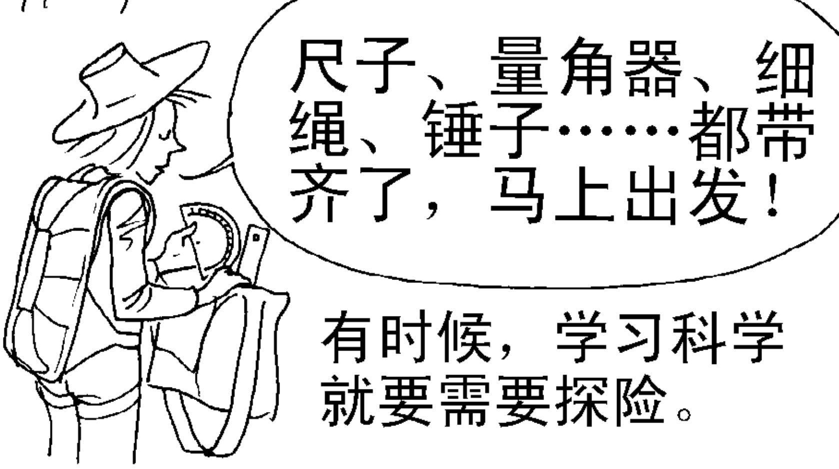
在没有过赤道之前，昂赛姆画的圆的弧度一直是“正常”的。



这样，我们就能清楚地看到在一个球体上，昂赛姆是怎样在不跨过圆的前提下，从一个圆里“出来”。我们可以把这个圆看成一条在一个台球上滑动的橡皮筋，不凡试试看。



那些球面上杂七杂八的圆使昂赛姆消化不良，病倒了。躺在病床上，他开始学习数学家高斯（1777-1885）所发现的所有几何面，然后毅然决定重新振作起来，再次前往几何王国探险。

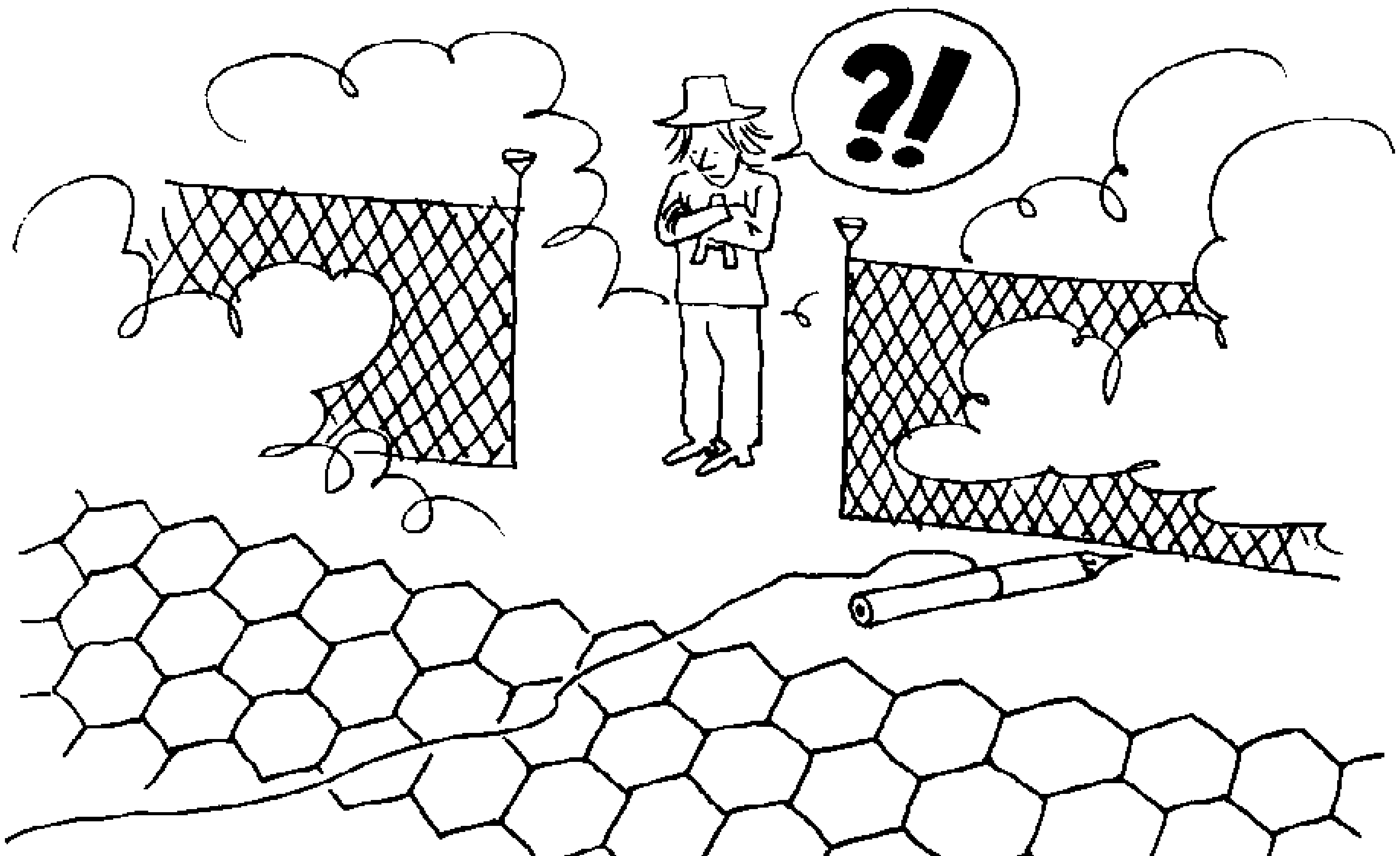


有时候，学习科学就要需要探险。

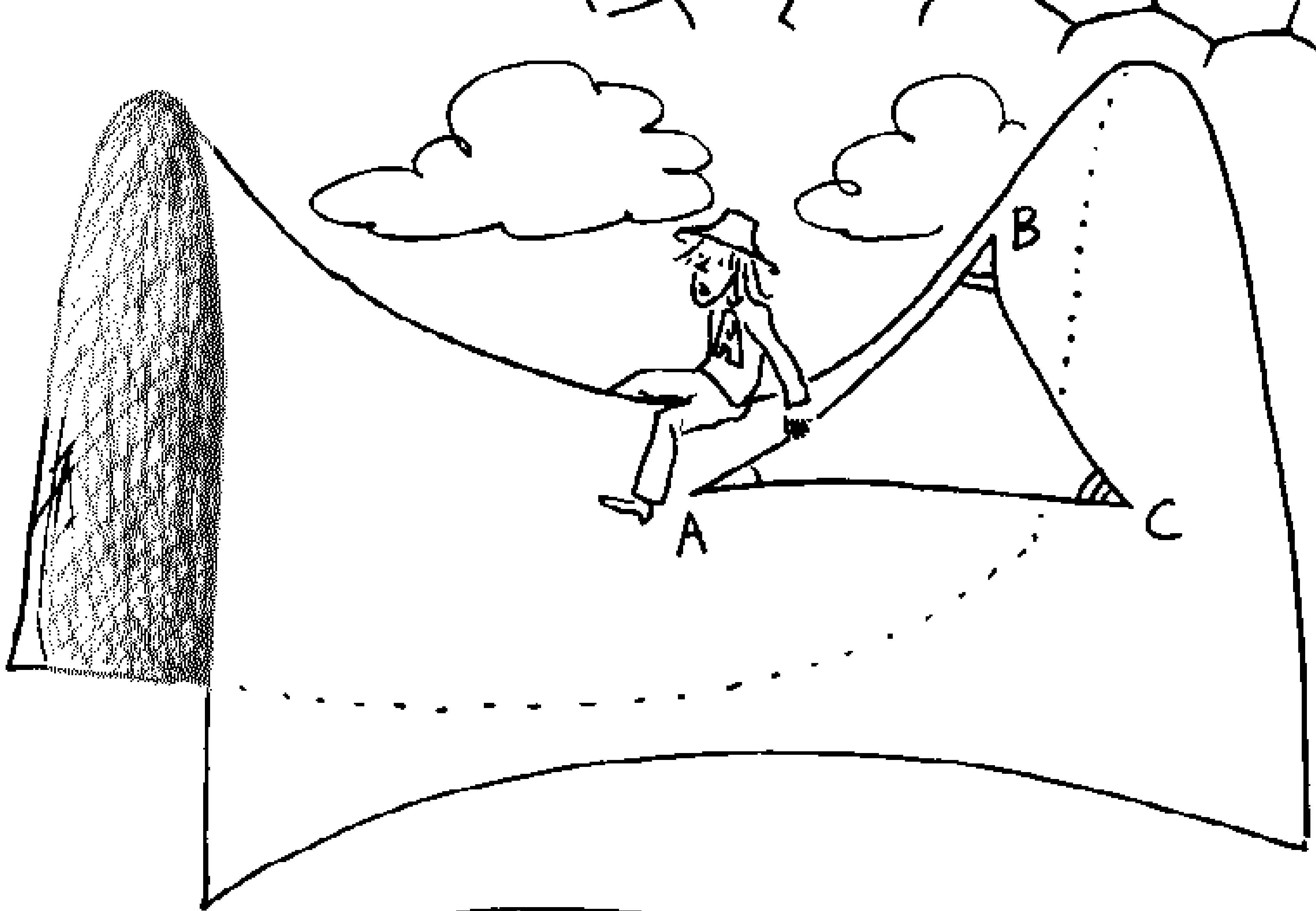
昂赛姆在一个新的城市着陆了。马上，他开始拉测地线。这次……

这次，他的测地线不再重合了。

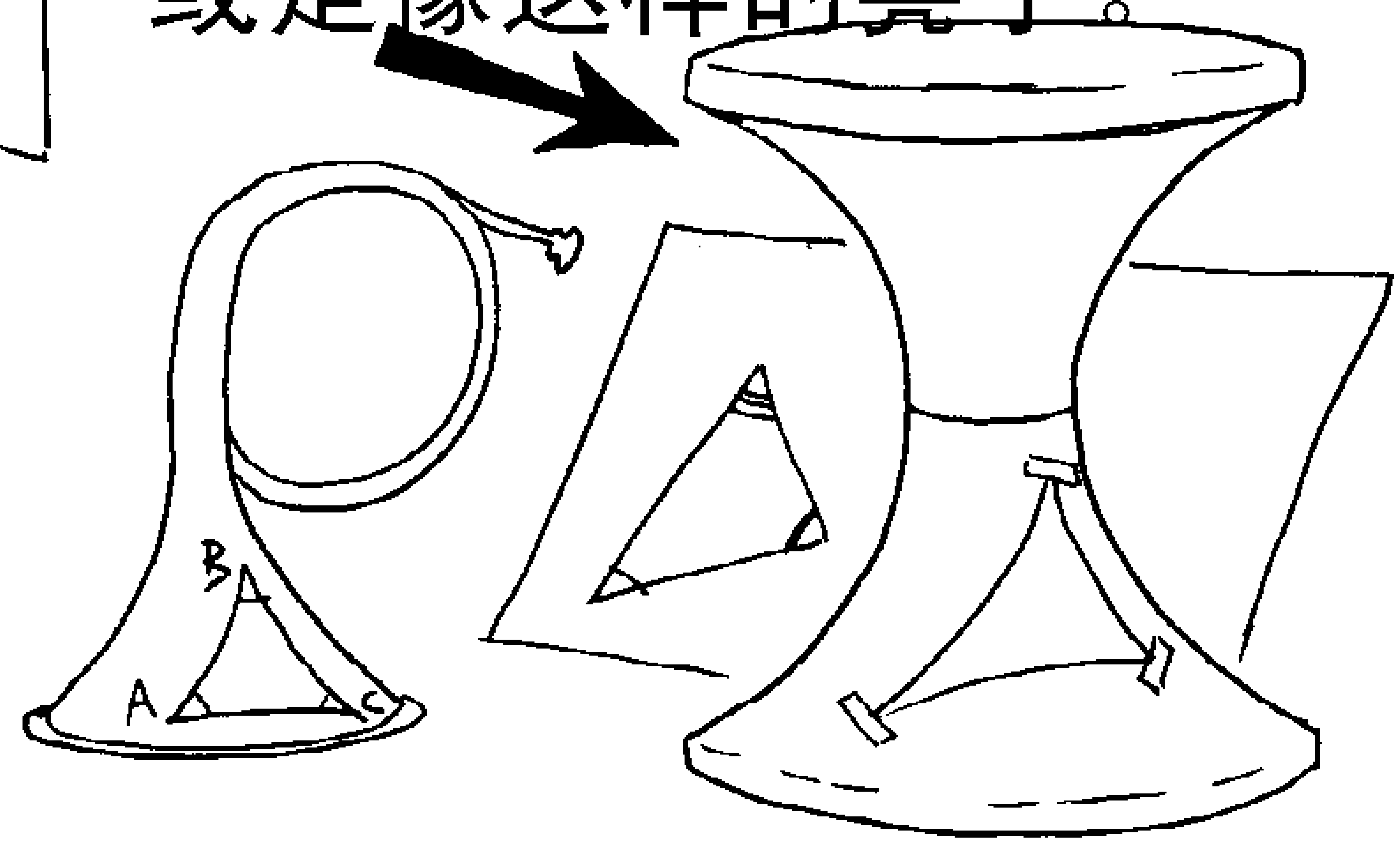
用三根拉紧的细绳做了一个三角形后，昂赛姆发现它的三内角总和小于180°。



这回，昂赛姆画的圆的周长比2 r要大，而且圆的面积也大于 r。这又是怎么回事呢？



拨开云雾一看，才知道他现在在的这个地方像是一个山口，或是一个马鞍。当然也和很多其他生活中的物品相似。比如这种号子，或是像这样的凳子。



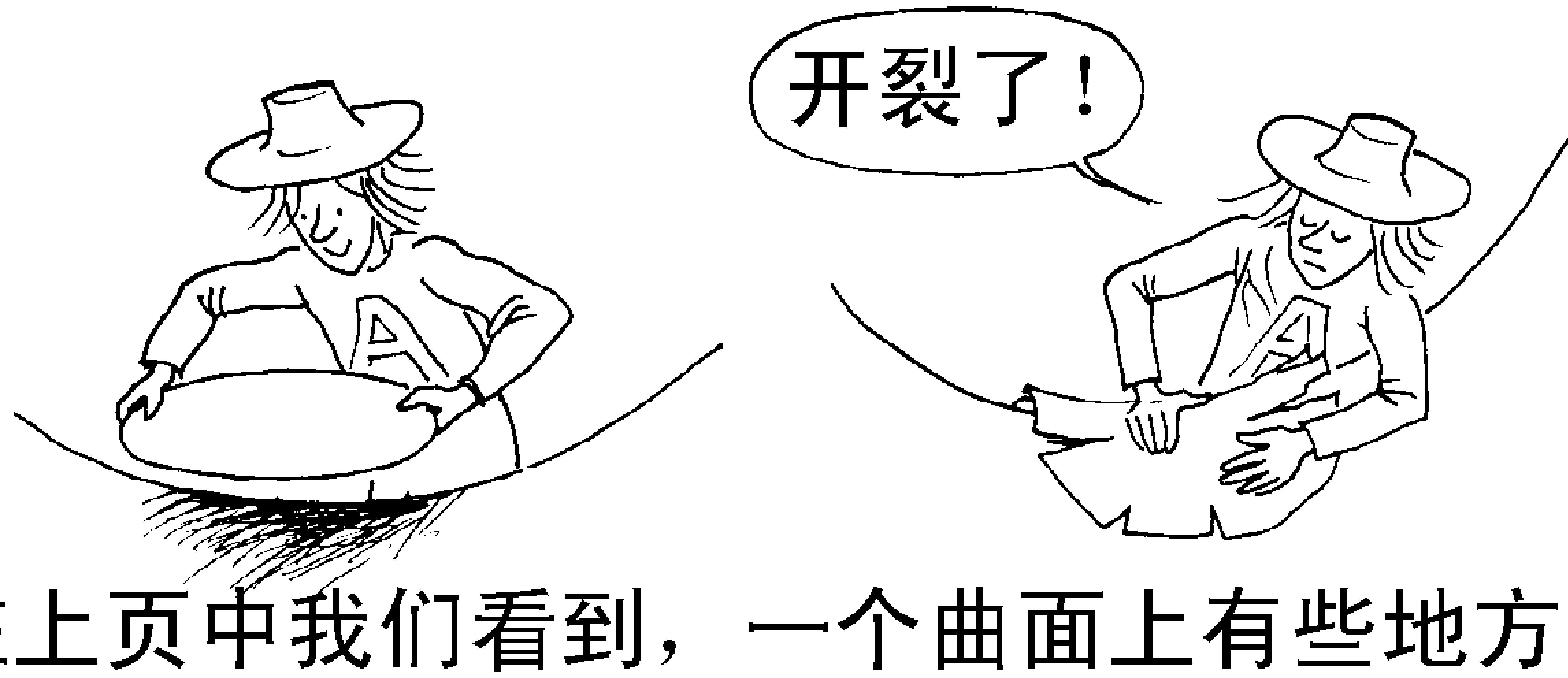
弧形城

在一个曲面上，欧几里德定律是行不通的。那么，就让我们来研究一下这些曲面。一个曲面的弧度是有正负之分。

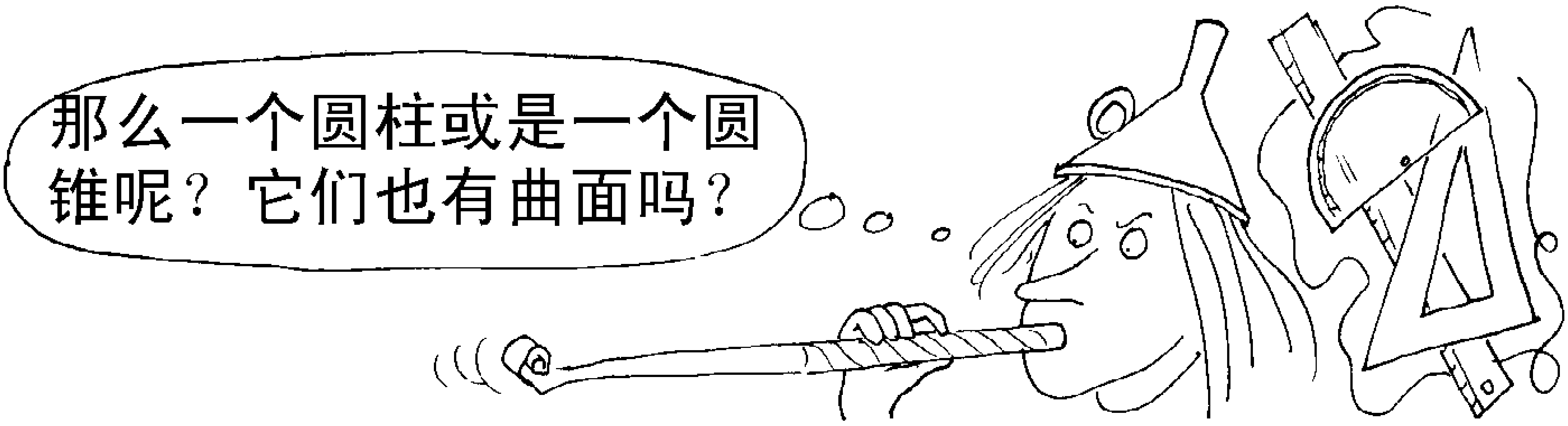
在一个弧度为正的曲面上，一个三角形的三顶角之和大于180°，而一个圆的周长小于$2\pi r$，面积小于πr^2。球体就是一个很好的例子。

而假如这个曲面的弧度为负的话，那么它上面的三角形的三顶角之和就小于180°，而圆的周长则大于$2\pi r$，面积也小于πr^2。

刚才，当昂赛姆把一个平面放在球体上的时候，平面就立即起皱了；而现在，当他把一个平面放在一个弧度为负的曲面上的时候，这个平面就会裂开来。用这么一个简单的包装测试就可以知道一个曲面弧度的正负。



在上页中我们看到，一个曲面上有些地方的弧度是正的，而有些地方的弧度则是负的。

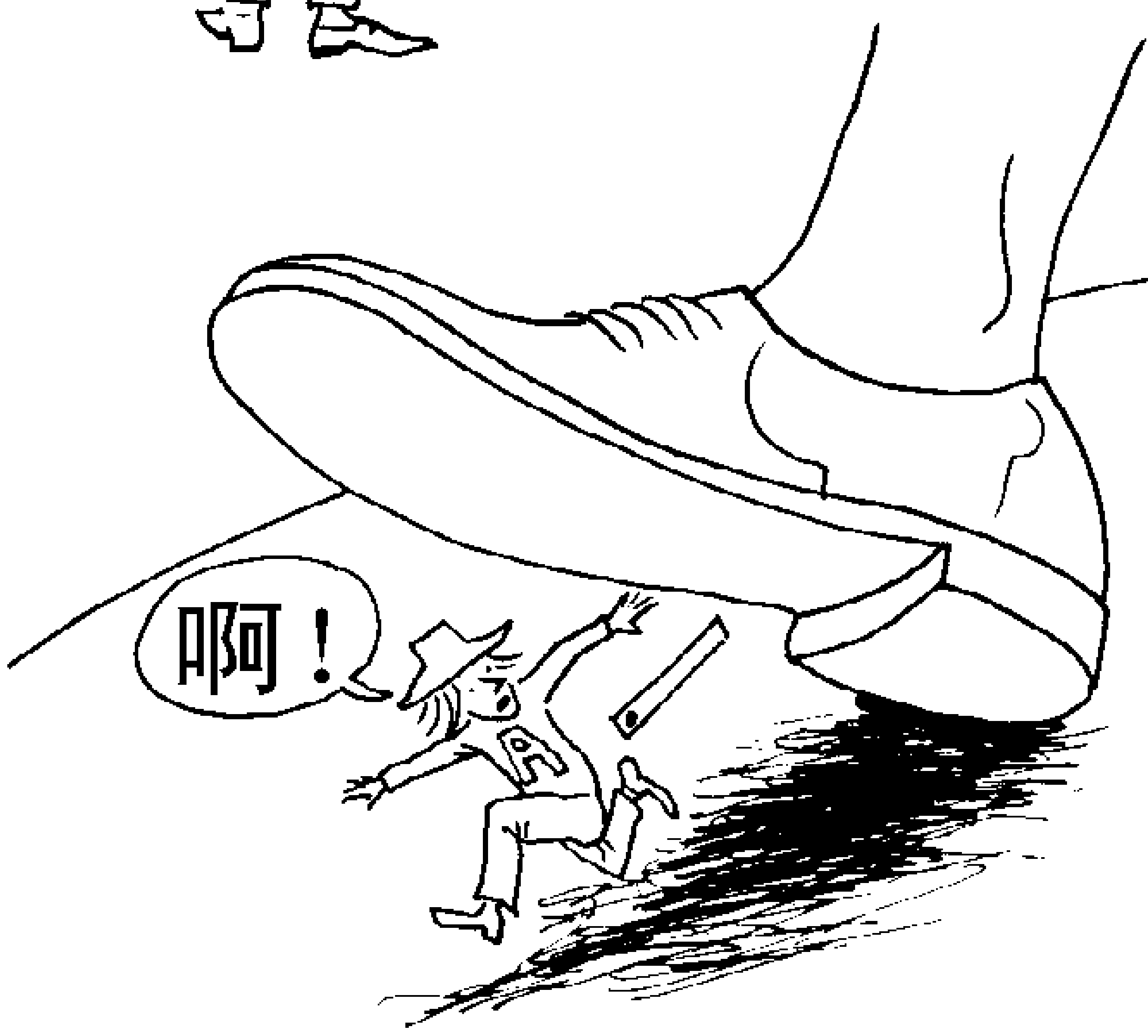


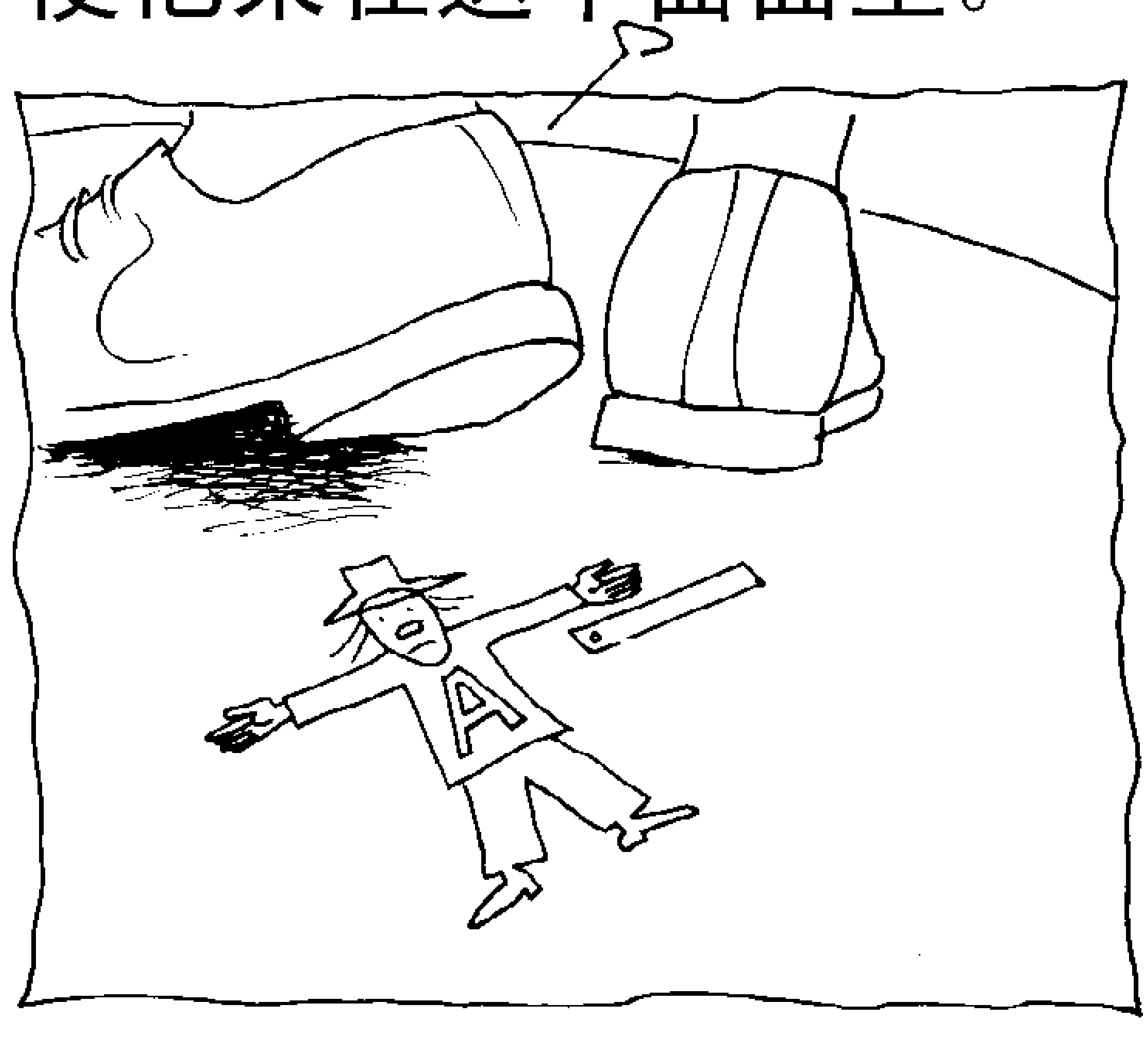

包装测试！
一个表面可以包在一个圆柱或是一个圆锥的表面。
不要紧张，让我来用透明胶把三根细绳贴到圆柱上面做一个三角形……
……现在我画下这三根细绳的位子，也就是测地线……
然后我把圆柱放平。
!...
根据我们的定义，欧几里德定律在圆柱和圆锥上都适用。那么也就是说，它们的表面都是平面！平面？！

空间概念

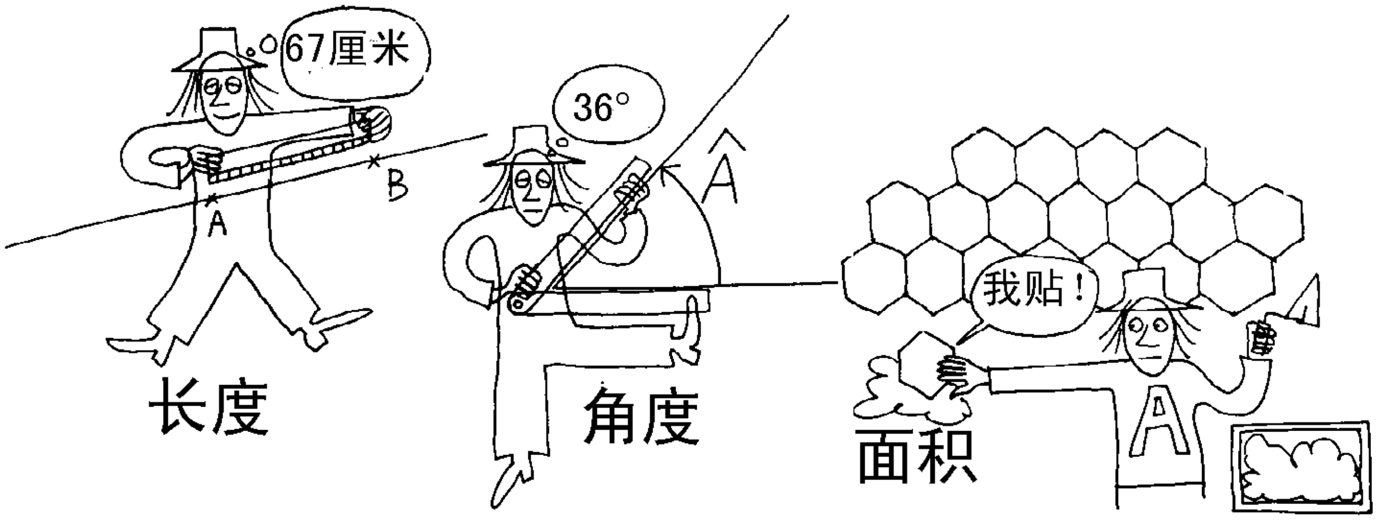
刚才，周围的云雾是昂赛姆几乎看不清自己鼻子前面的东西。不然的话，他就可以看到当时地面是弯曲的了。现在，还有一个办法使他看不到这个曲面。那就是……

把他压扁，使他呆在这个曲面里。





这种情况对以下物理量的测量都是没有影响的。



虽然昂赛姆被压扁在这个表面上，什么也看不到，但他还是可以通过测量知道它是不是一个曲面，甚至曲度的正负。在这个面上画一个三角形，假如三内角总和等于180°，那么这就是个平面。但如果它大于180°，那么这则是个正曲面，而且我们可以用以下公式求出局部曲面所在球体的半径R：

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ(1 + \frac{A}{\pi R^2})$，A为三角形面积。

反之，当这个总和小于180，我们就用这条公式来求R：$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ(1 - \frac{A}{\pi R^2})$。

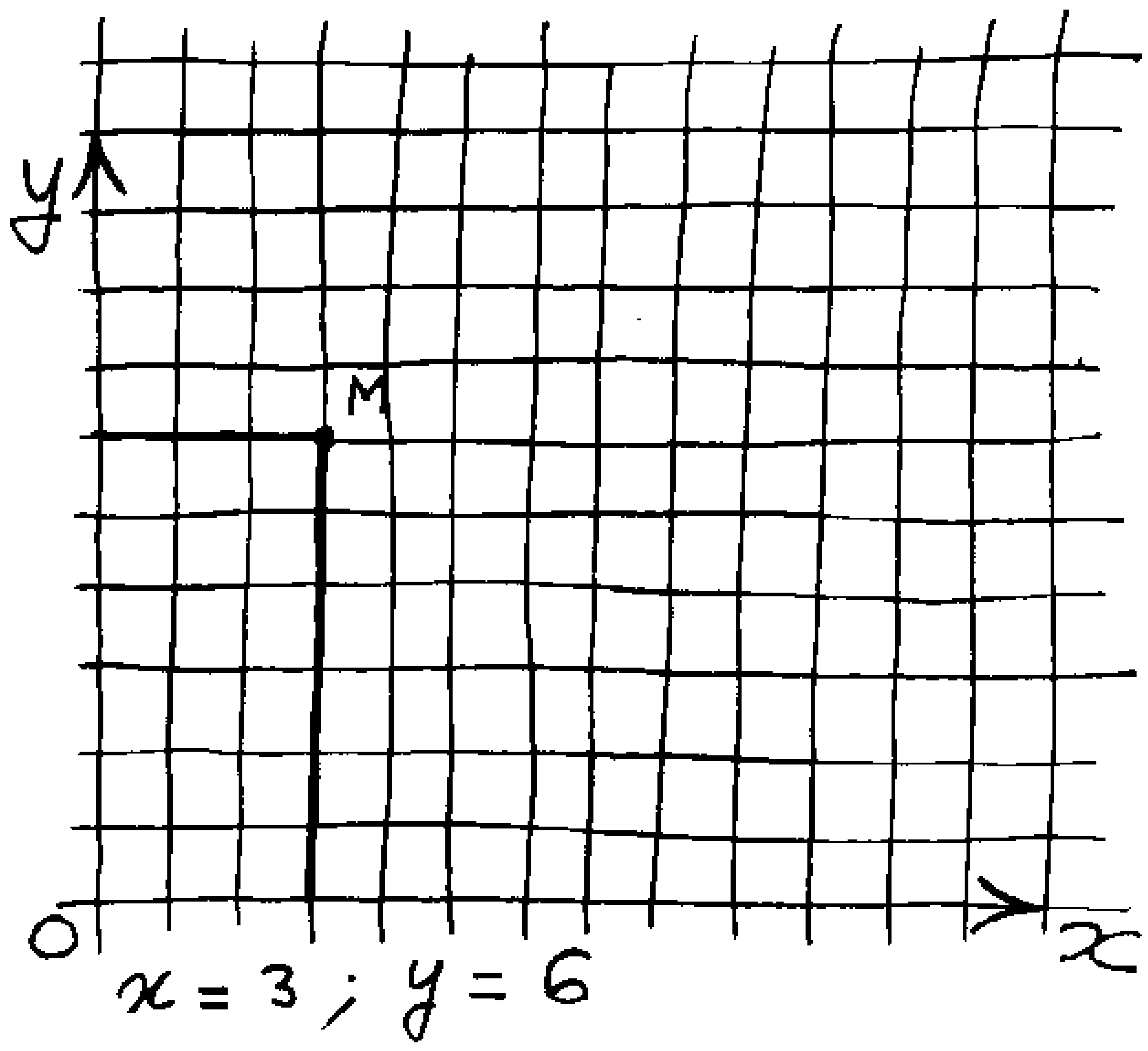
当然，这一切都要通过数学的“眼光”去看。

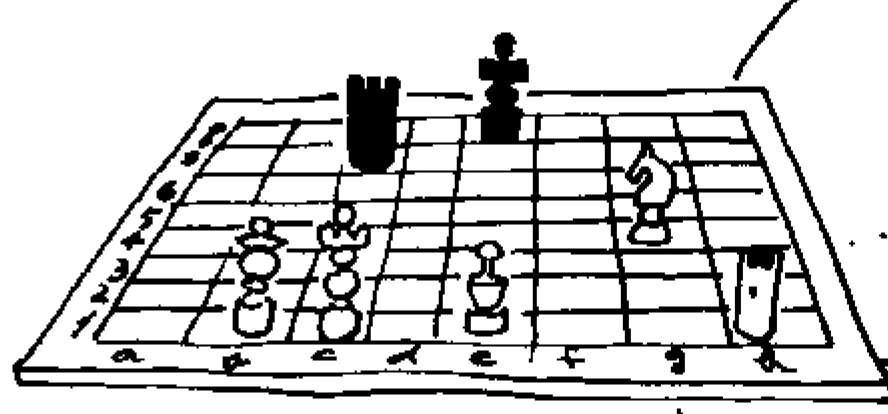
同时，我们还可以发现，对于一个平面来讲，它的R无穷大。

维数的概念

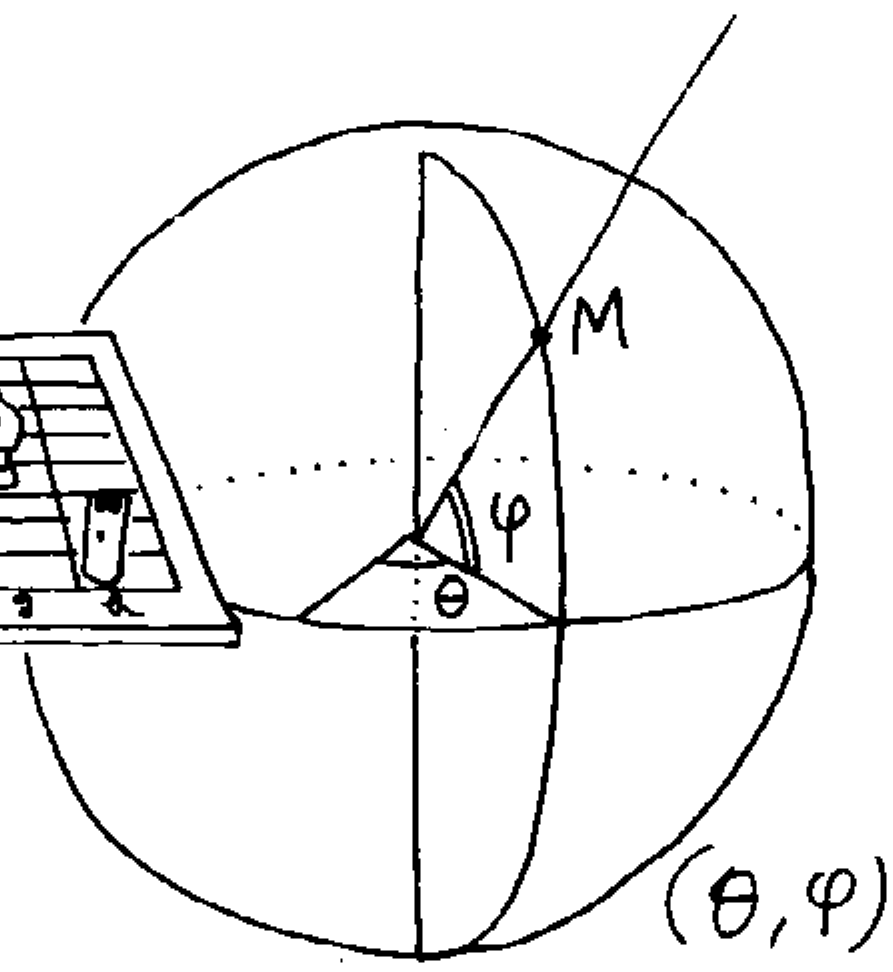
维数，简单的说，就是在任意一个空间里定义一个点所需坐标的数量。

所有面的维数都为二。能在这些面上表明的量有长度，面积，角度等。



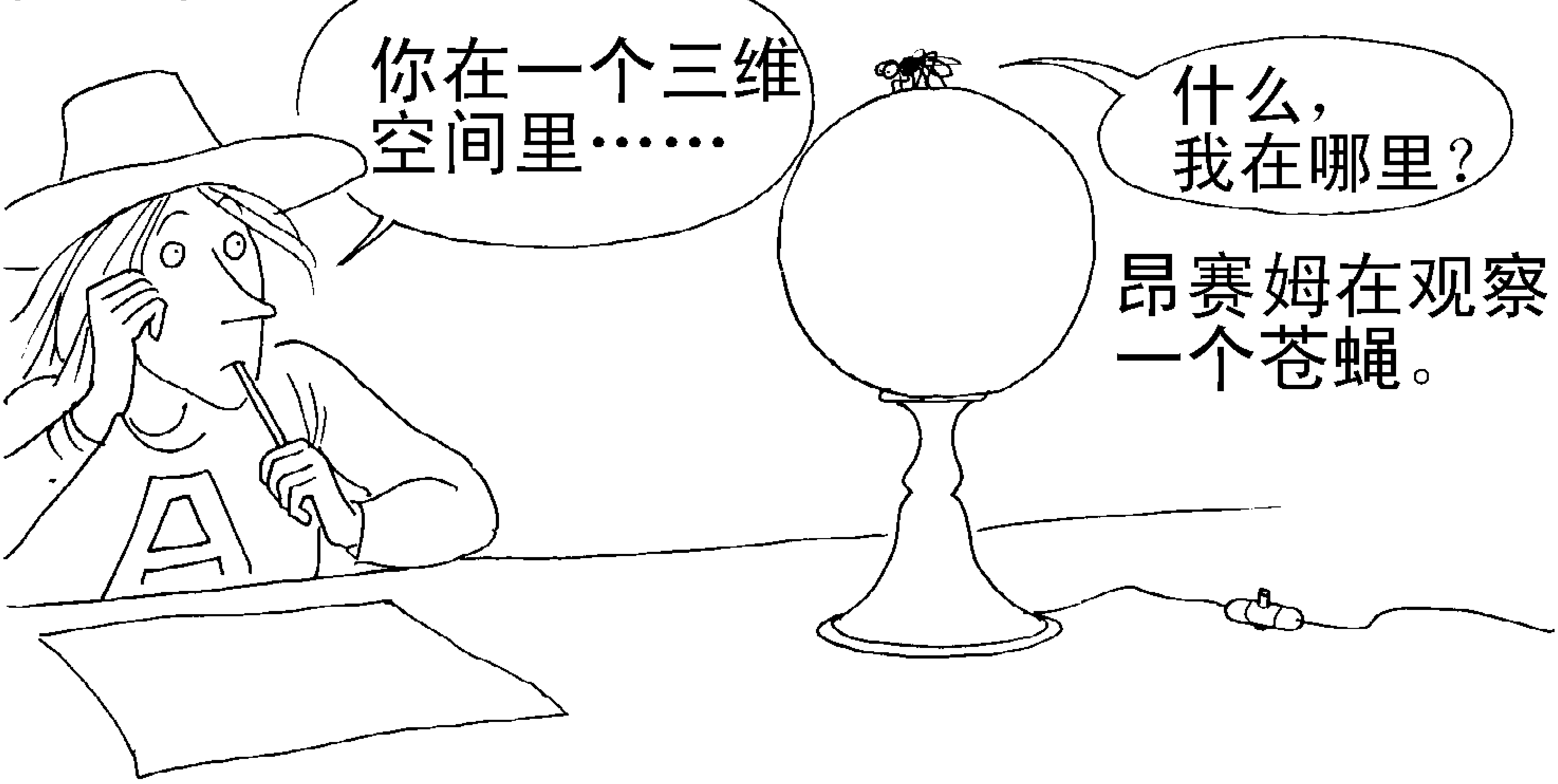


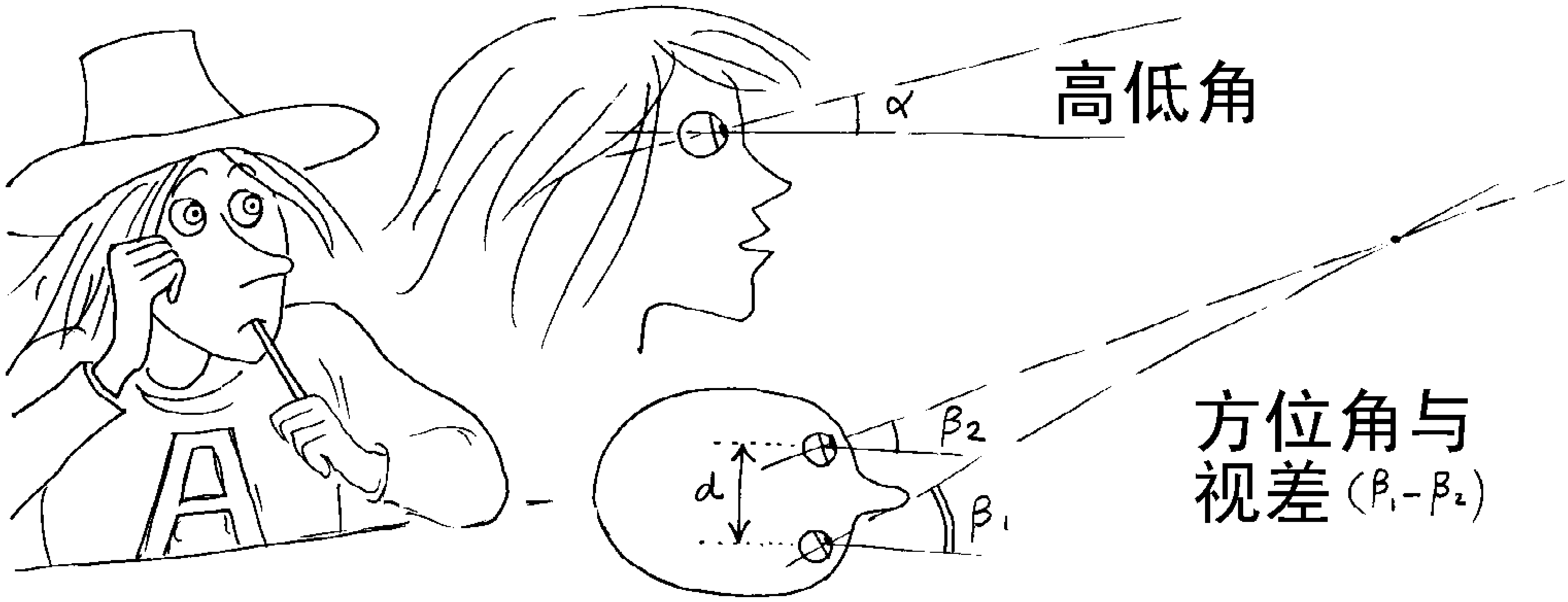
马：g4



经度和纬度

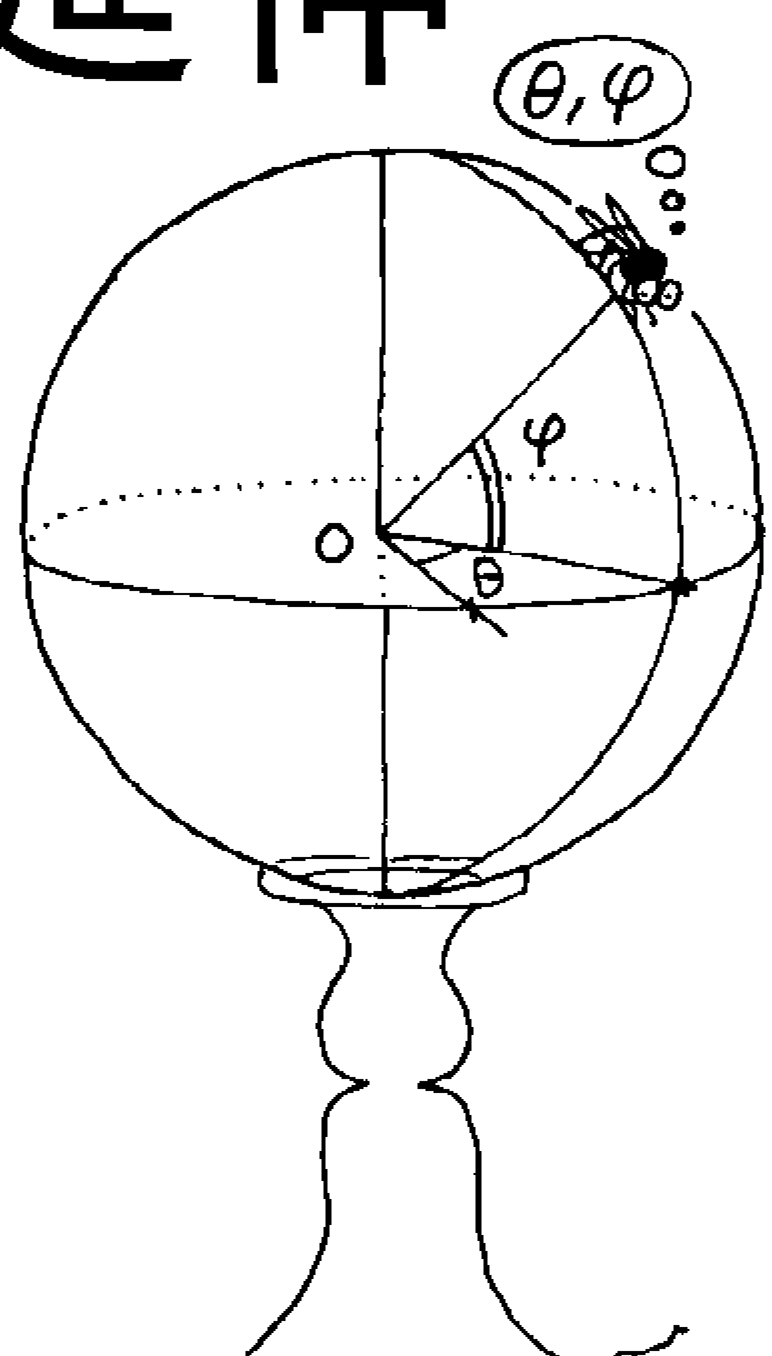
习惯上讲，如果不考虑时间的话，我们生活的空间上三维空间。





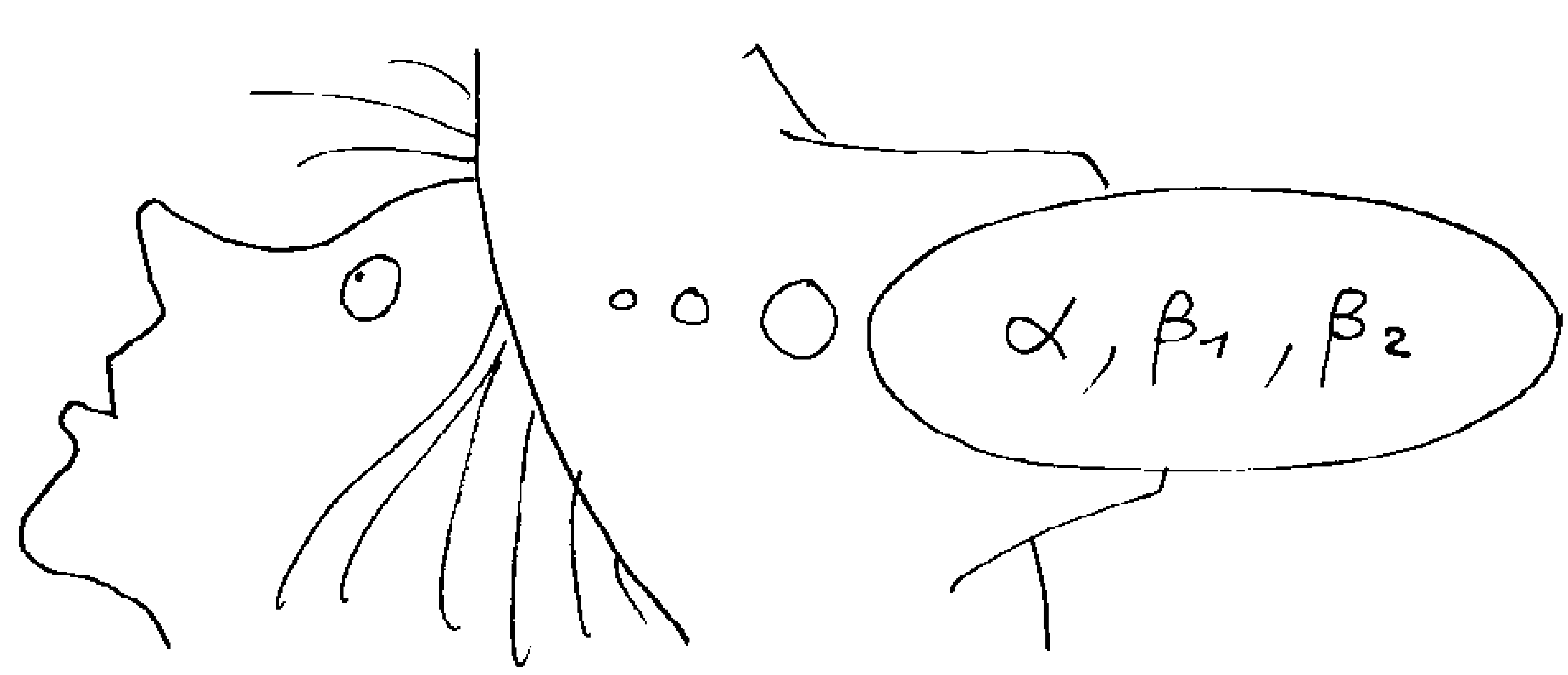
昂赛姆利用他的双眼观察，这样他就能根据以下三个角来确定一个点关于他小脑瓜的位置：高低角 α 和左右两眼的方位角 β_1 与 β_2
这两个方位角的角度差 $\beta_1-\beta_2$ 被称为视差。
经过一系列解密，昂赛姆的大脑能根据视差确定点的距离。

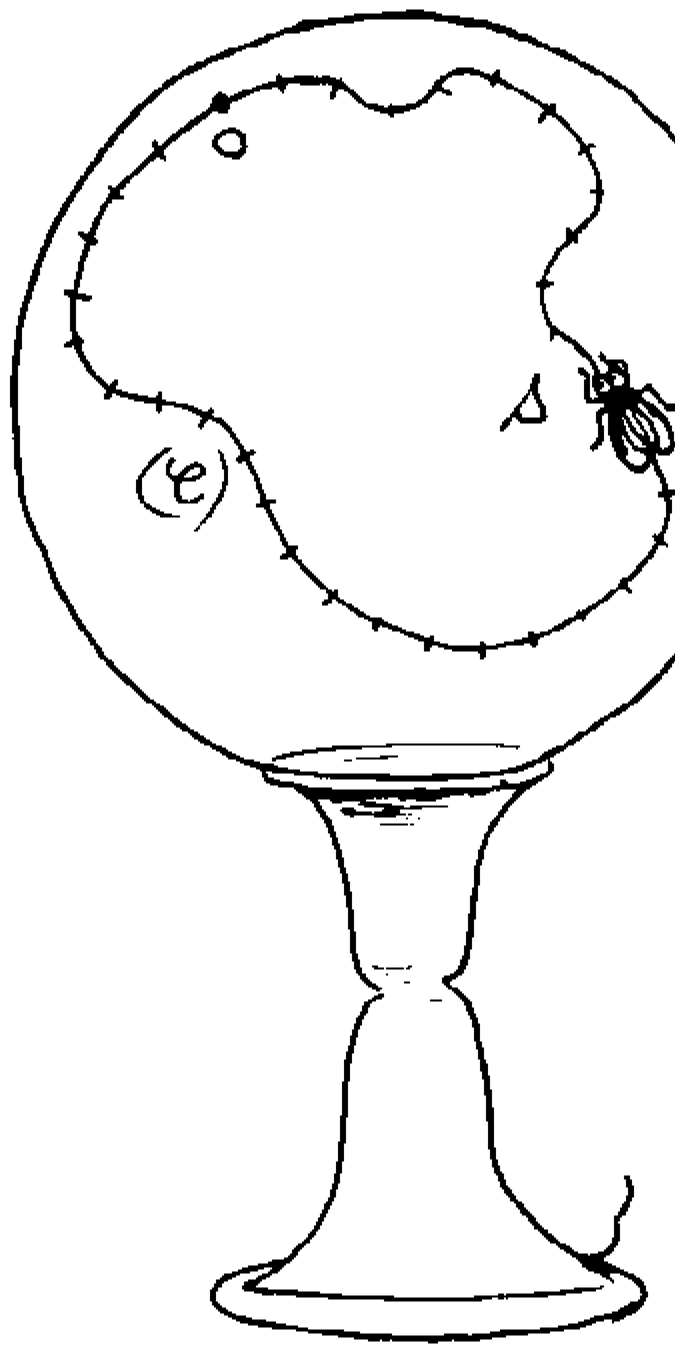
延伸



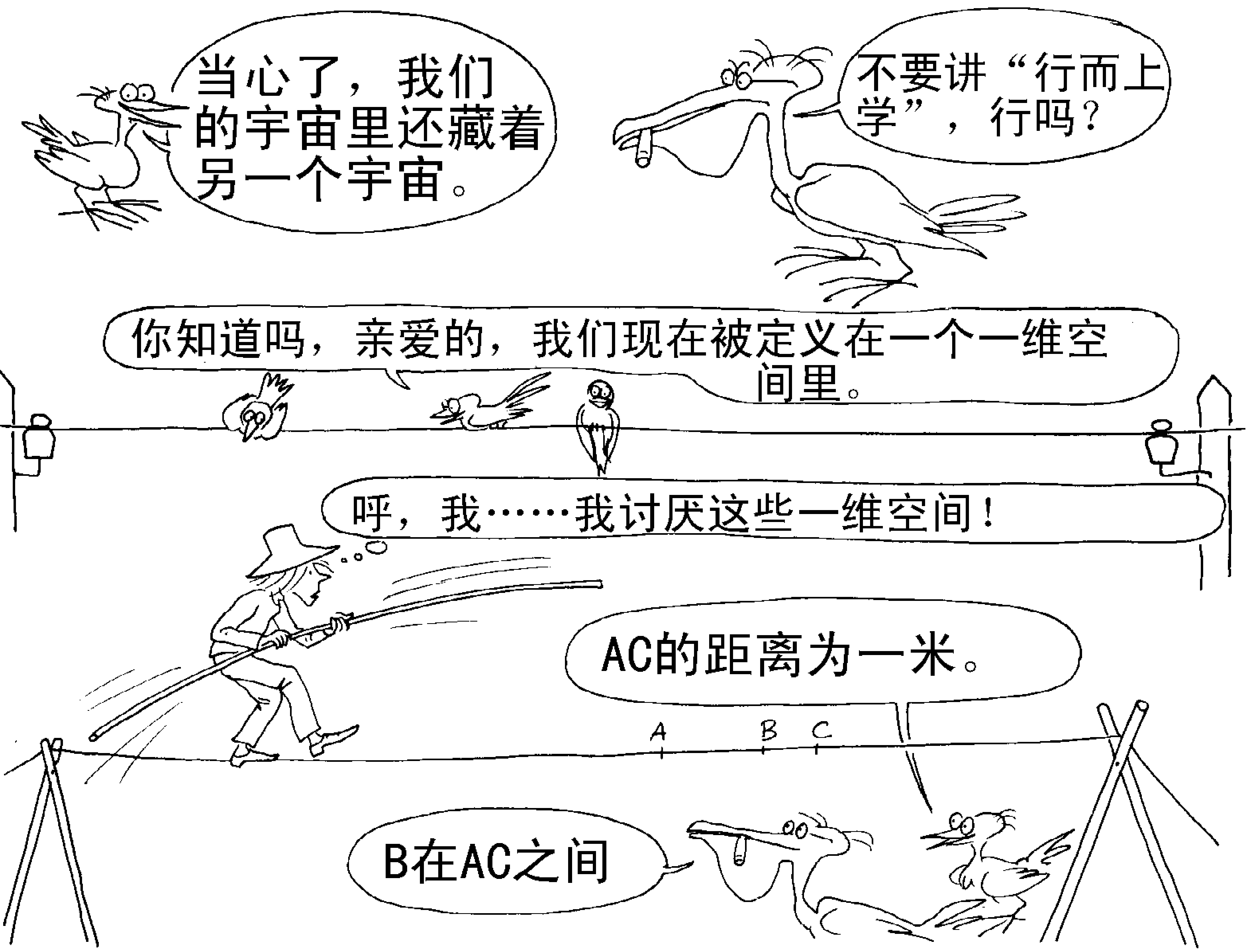
当这只苍蝇在这个球体台灯上爬的时候，我们可以用球体的经纬度来标明它在二维球面上的位置。

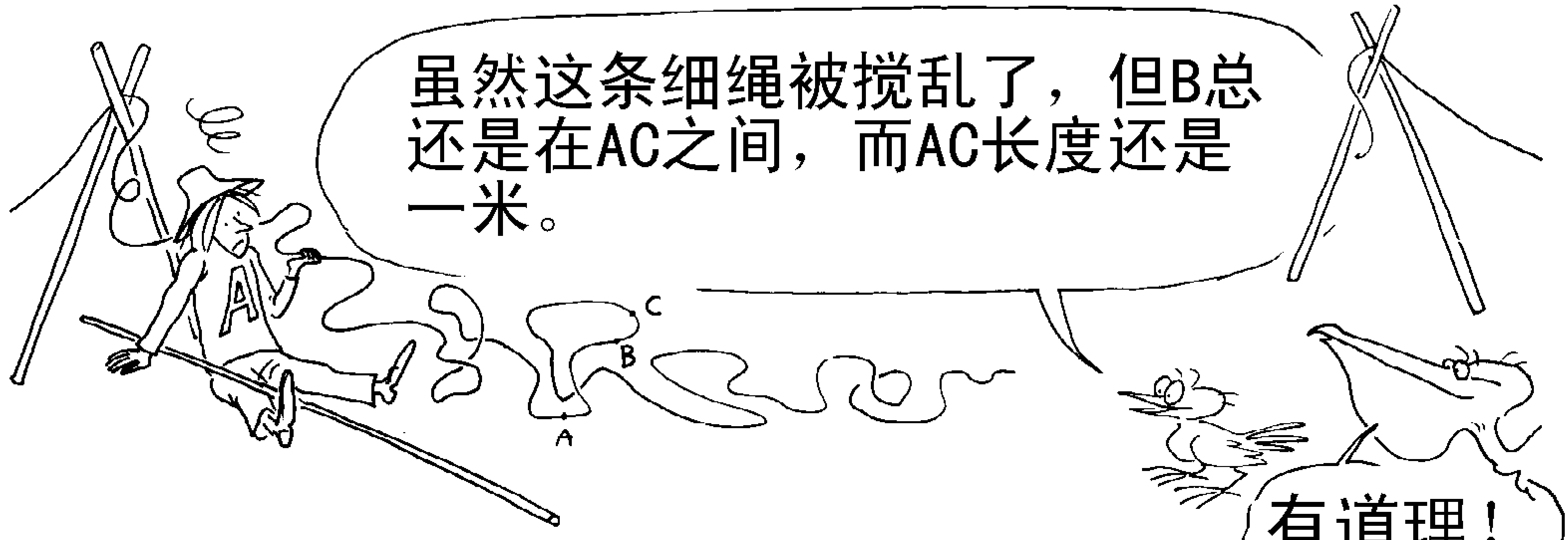
这样，我们就说，这个二维空间在我们的三维空间里延伸。



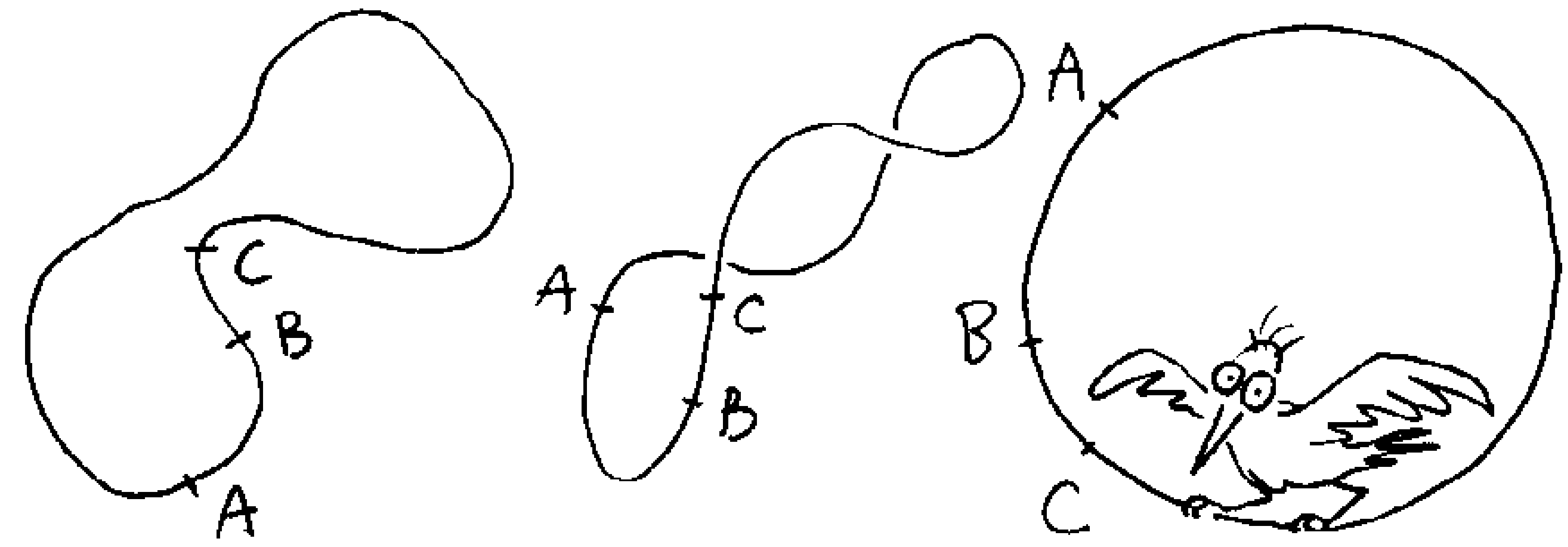


假设这只苍蝇在球面上的运动轨迹为 ℓ 那么我们就可以只用一个坐标 s 来确定它的位置：s 为轨迹上任意一点关于出发点的轨迹距离。
这条轨迹是一个一维空间，但它在一个二维空间（球面）上延伸；而这个二维空间又在一个三维空间里延伸。
以此推断，我们生活的三维空间就可能在另一个维数更高的空间里延伸。





这样看来，有些在某一空间的性质与这一空间的延伸方式无关。

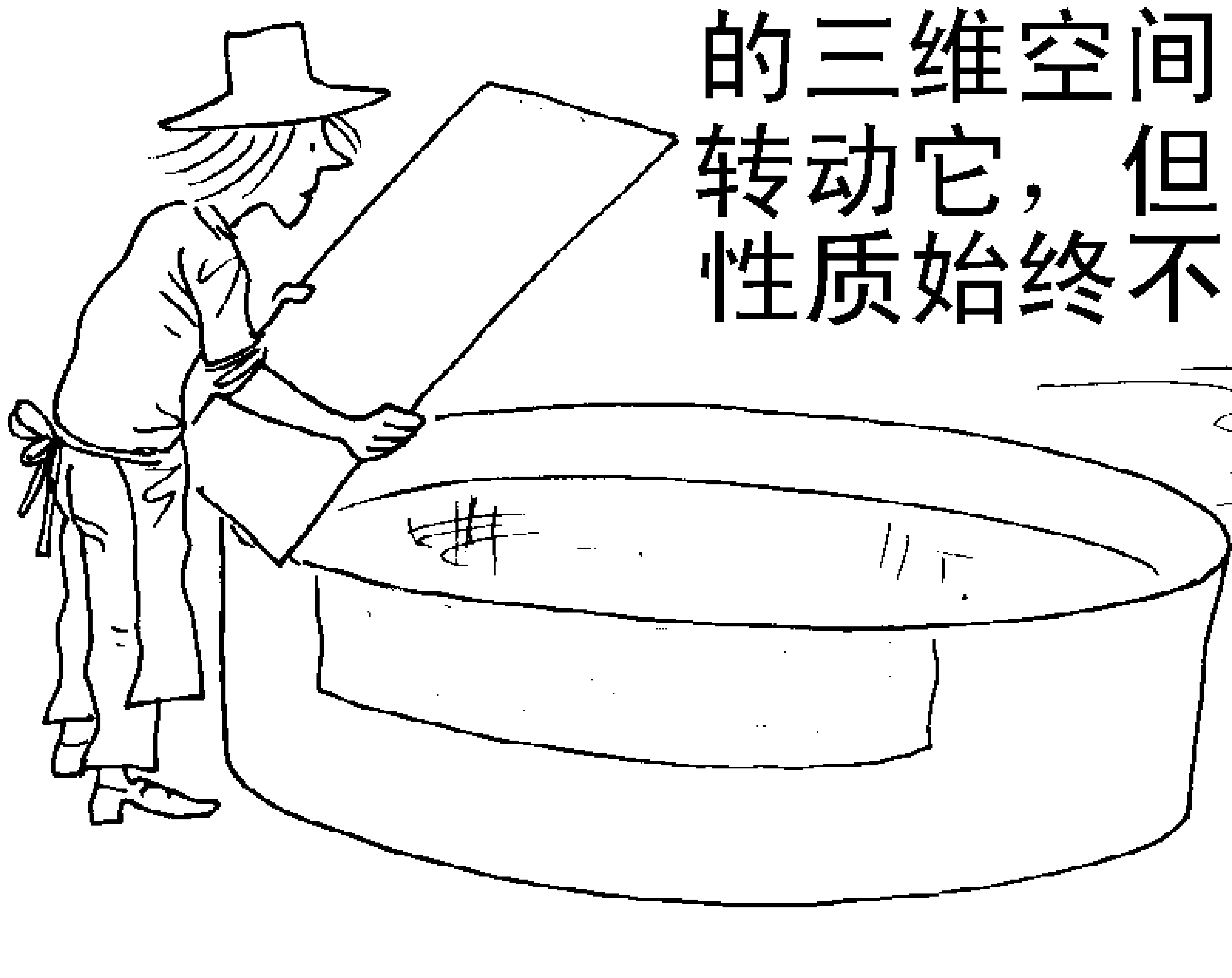


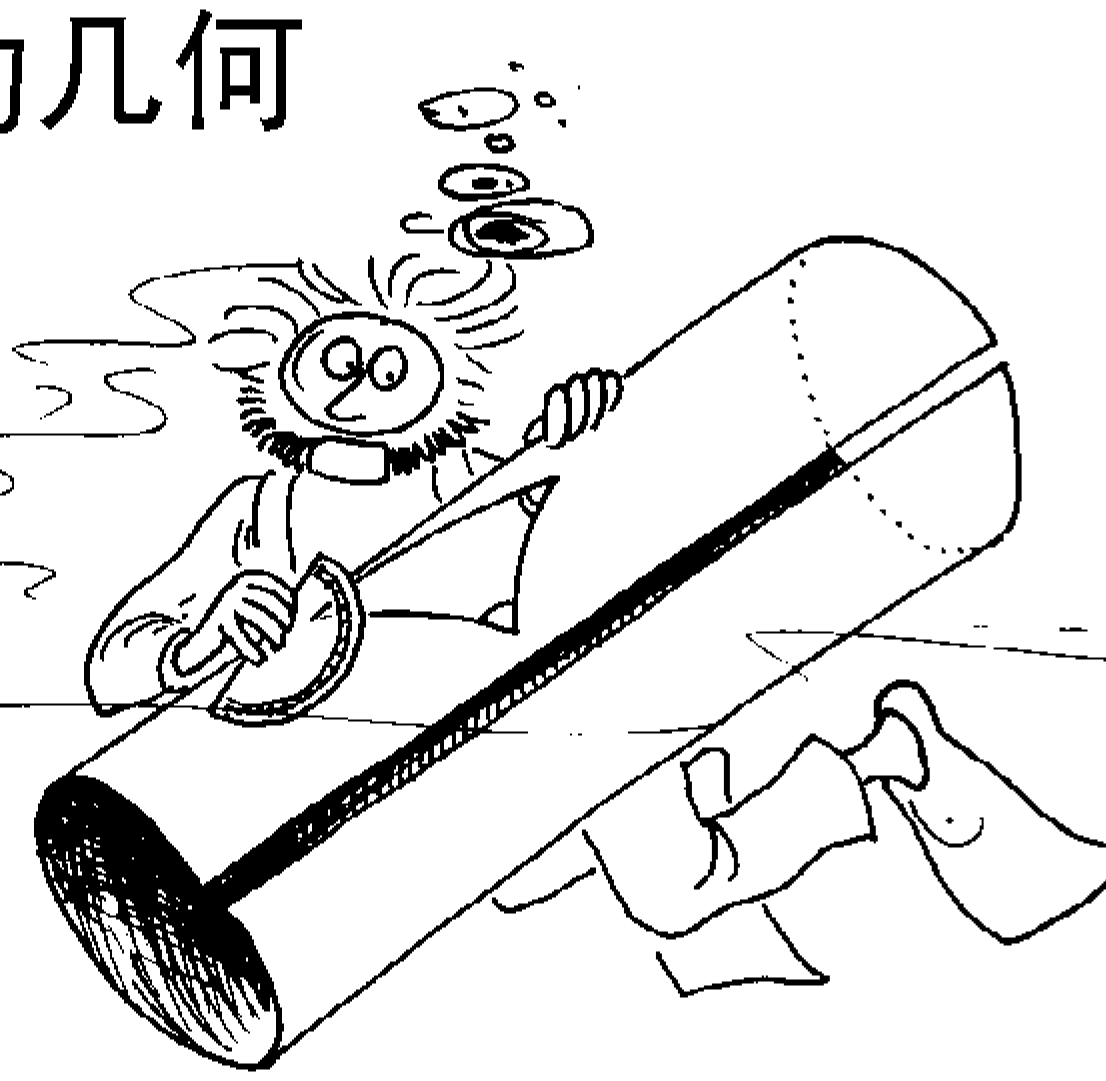
如左边几个图所示，无论我们怎么摆弄这根关闭的线圈，它永远还是关闭的。

而且，在不使细绳变形的情况下，A B C 三点之间轨迹距离也不变。

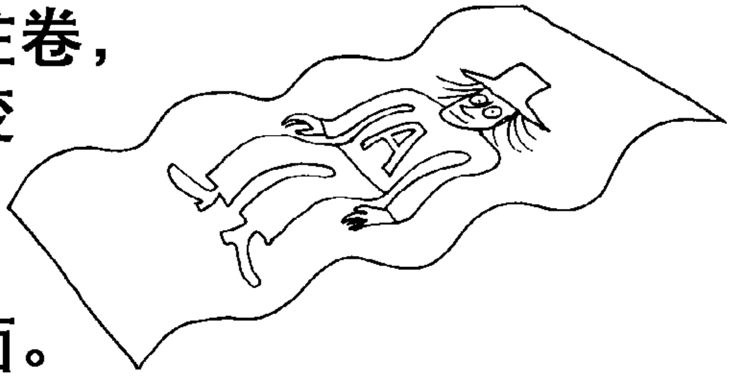
现在，我们把面，也就是二维空间，在三维空间里扩展。

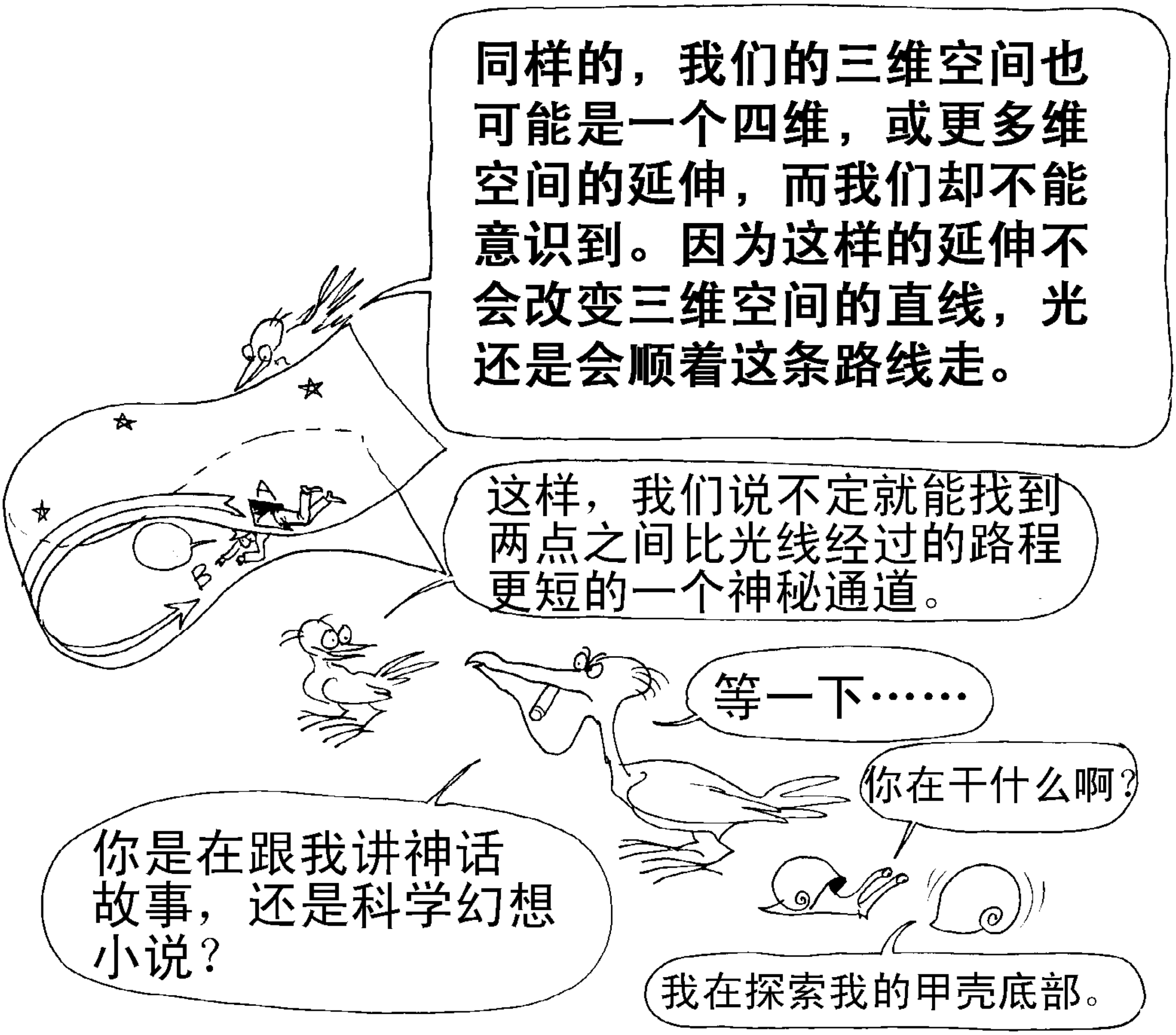
假如我们把一个平面放到一个普通的三维空间里，我们可以移动它，转动它，但它的几何性质始终不变。



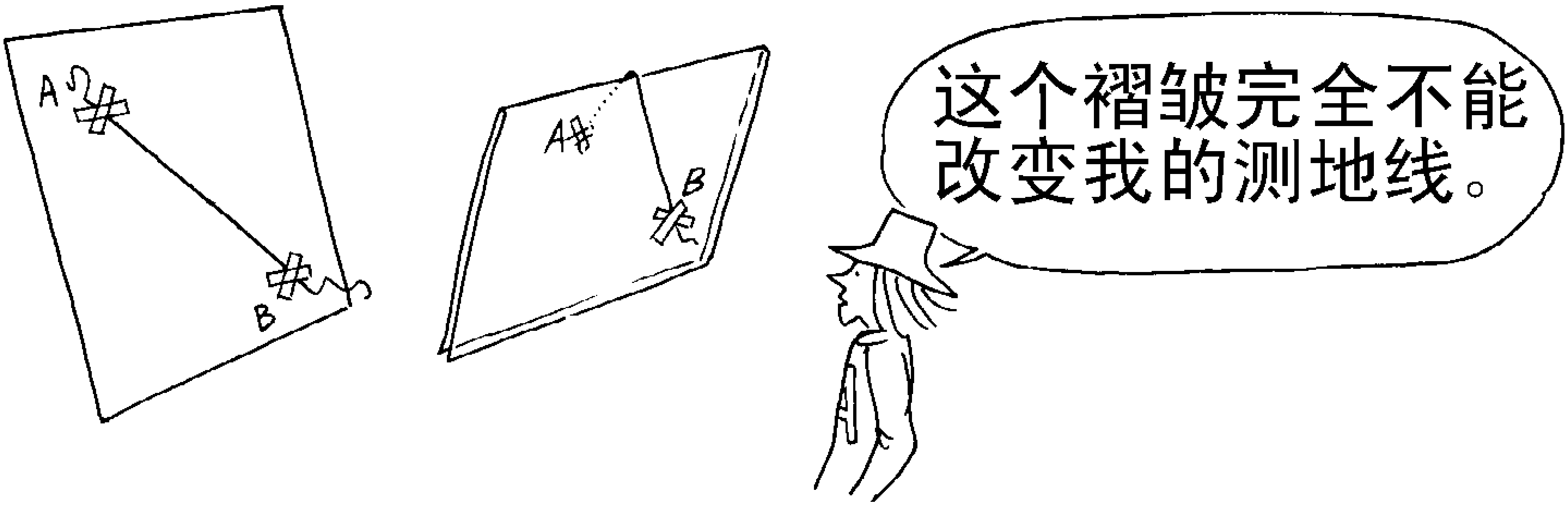


我们可以发现，假如我们只是
把一个平面绕一个圆柱卷，
变形之后的面不会改变
直线和角。
所以，一个波状弯曲
的面还是一个欧式平面。
住在这样一个二维空间里的人永远也不能想象
平移，转动，波动是怎么样的。

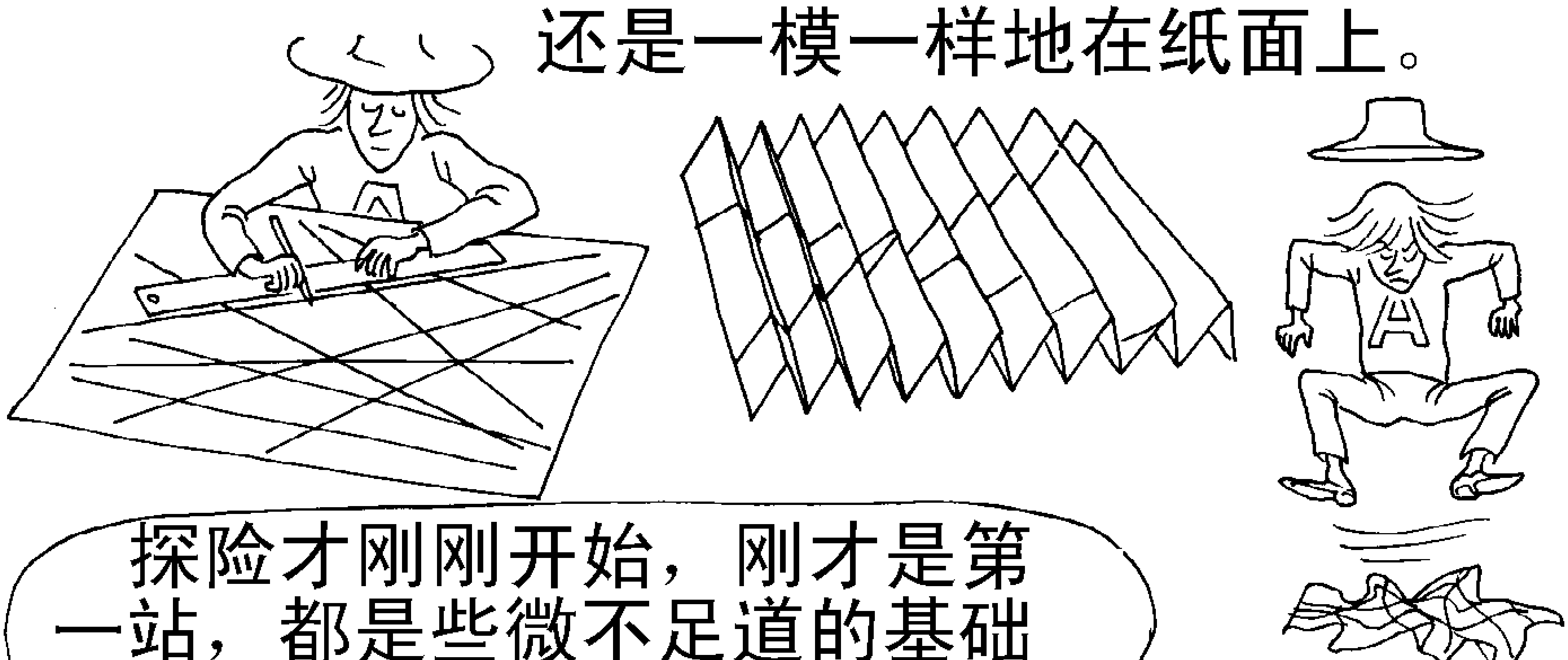


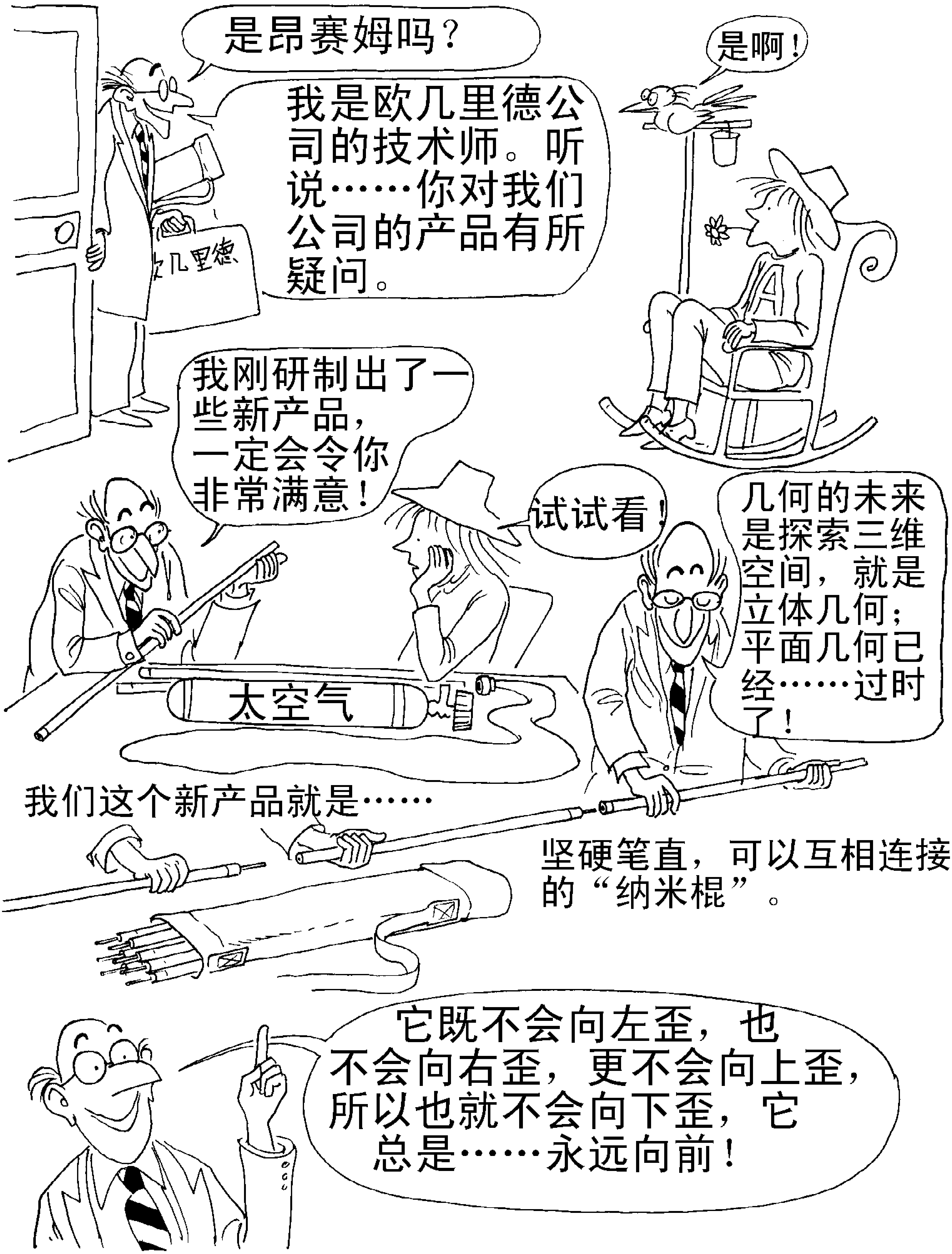


取一小块平面，然后把它
折起来。



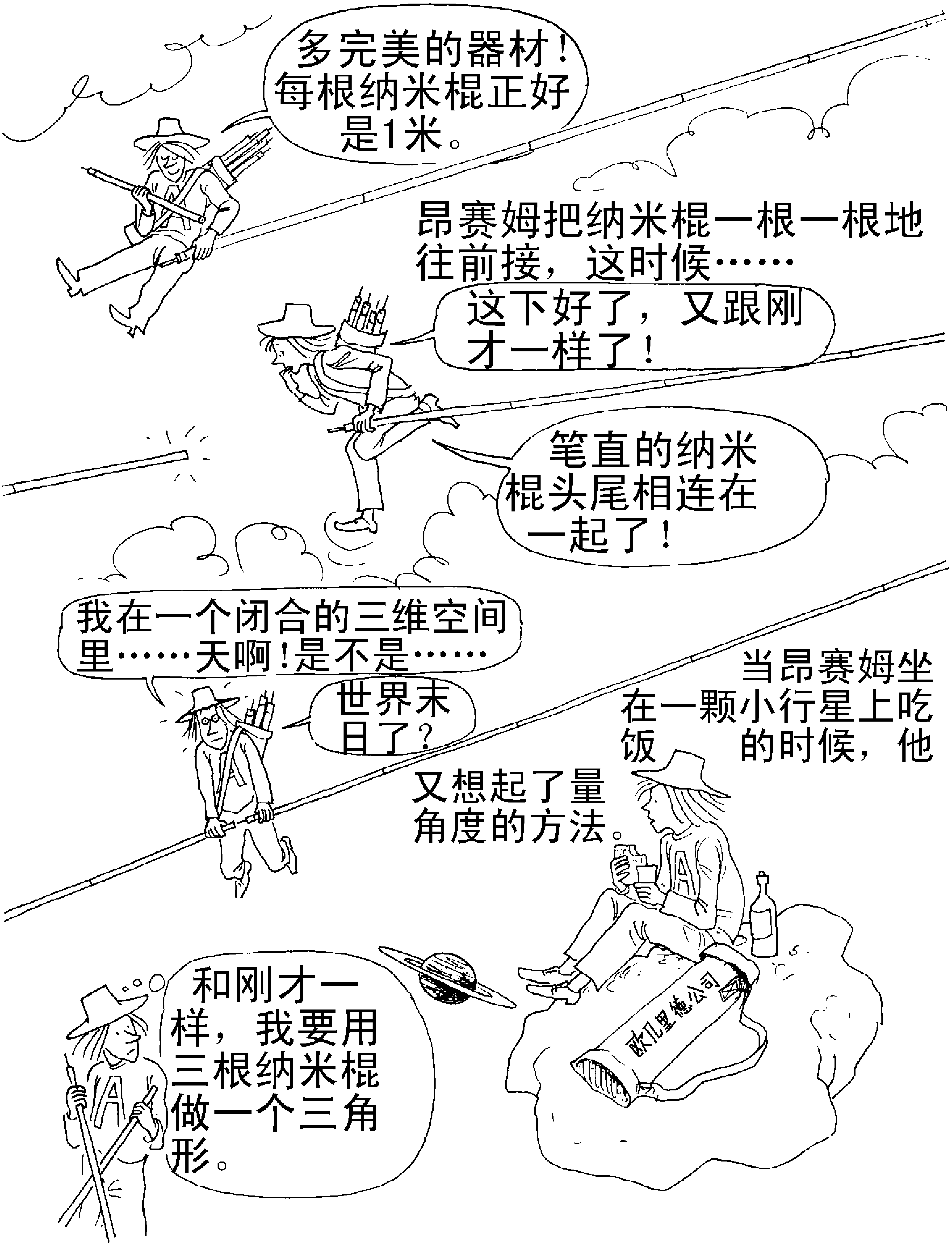
用尺子在一张纸上画一些线段，然后把纸弄皱。
大家会发现，无论怎么皱，那些画起来的线段总
还是一模一样地在纸面上。





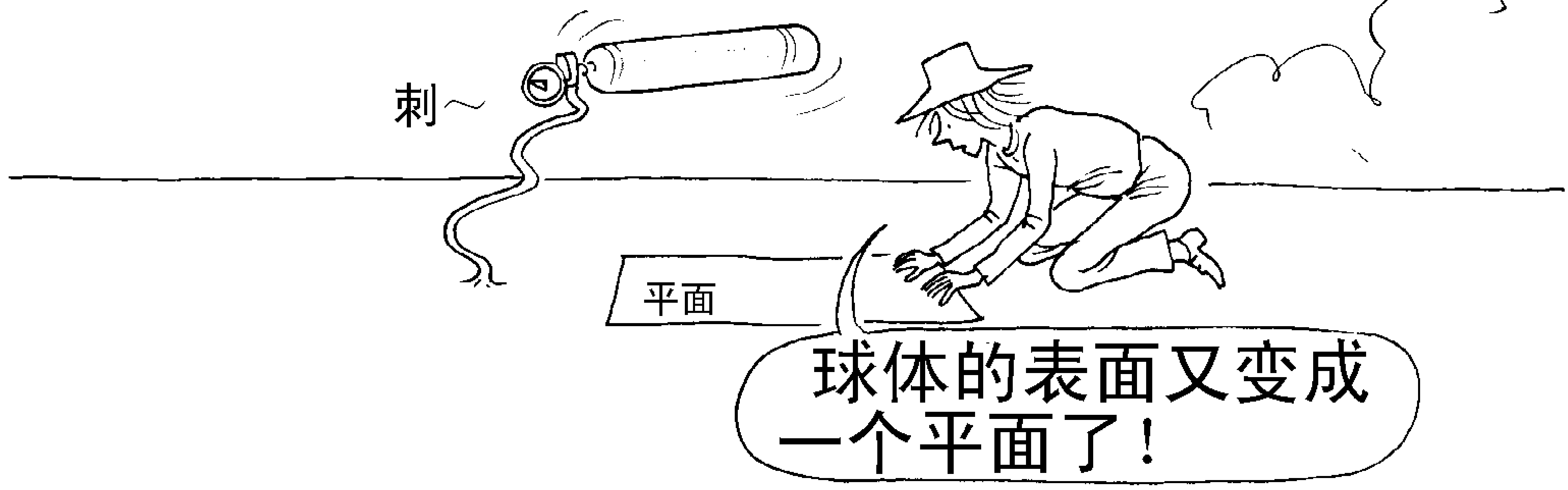
是昂赛姆吗？
是啊！
我是欧几里德公司的技术师。听说……你对我们公司的产品有所疑问。
欧几里德
我刚研制出了一些新产品，一定会令你非常满意！
试试看！
几何的未来是探索三维空间，就是立体几何；平面几何已经……过时了！
太空气
我们这个新产品就是……
坚硬笔直，可以互相连接的“纳米棍”。
它既不会向左歪，也不会向右歪，更不会向上歪，所以也就不会向下歪，它总是……永远向前！


这些油漆是用来测量面积的，1平方米正好是100克。绝对有质量保证。
太妙了！
要测量体积的话，就使用这个太空气。把要测的东西充满气体之后，只要看流量表就可以了。
别忘了，球体面积公式是πr^2，体积公式是$4/3\ r^3$。
记住了！
欧几里德公司
我来了！
这一次，昂赛姆在三维空间城降陆了。让我们马上跟上他，一起探索这个城的奥秘吧！


多完美的器材！每根纳米棍正好是1米。
昂赛姆把纳米棍一根一根地往前接，这时候……
这下好了，又跟刚才一样了！
笔直的纳米棍头尾相连在一起了！
我在一个闭合的三维空间里……天啊！是不是……
世界末日了？
当昂赛姆坐在一颗小行星上吃饭的时候，他又想起了量角度的方法。
欧几里德公司
和刚才一样，我要用三根纳米棍做一个三角形。

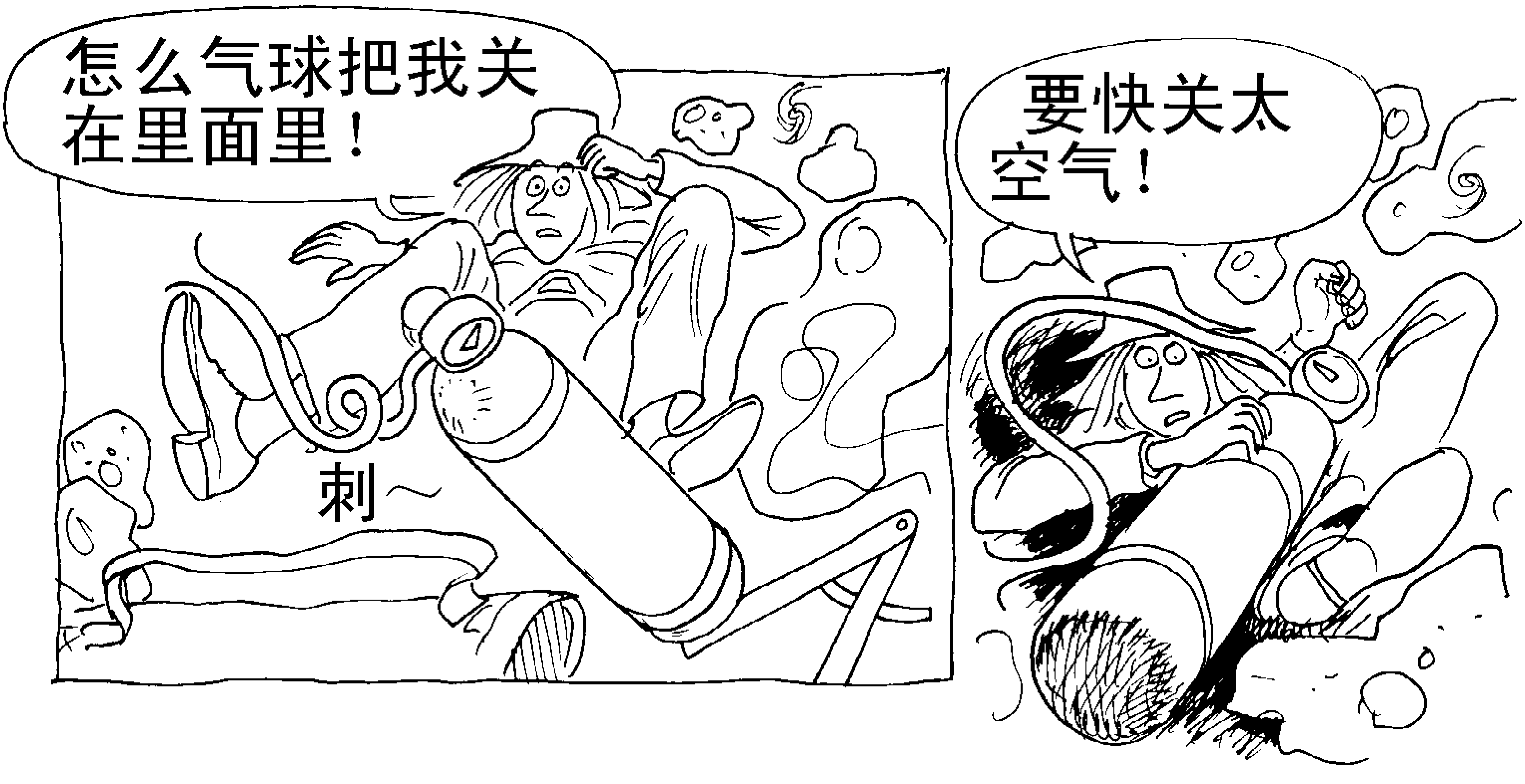
?!?
三角形做好了，但是三内角之和却和刚才一样，大于180°！！
嗯！
刺
我要做一个大气球，然后看看它的体积。
一个半径为R的球体是所有在空间里离一个固定点N距离相等的点的集合。
球体的表面积小于$4\pi R^2$
这下好了，它的体积又小于$4/3\pi R^3$了！
这又是怎么回事啊？

昂赛姆继续往大气球里充气。



昂赛姆继续充气……

接着……



昂赛姆就是这样在三维空间城里简简单单地吹了一个气球，他却被莫名其妙地关在了……里面！

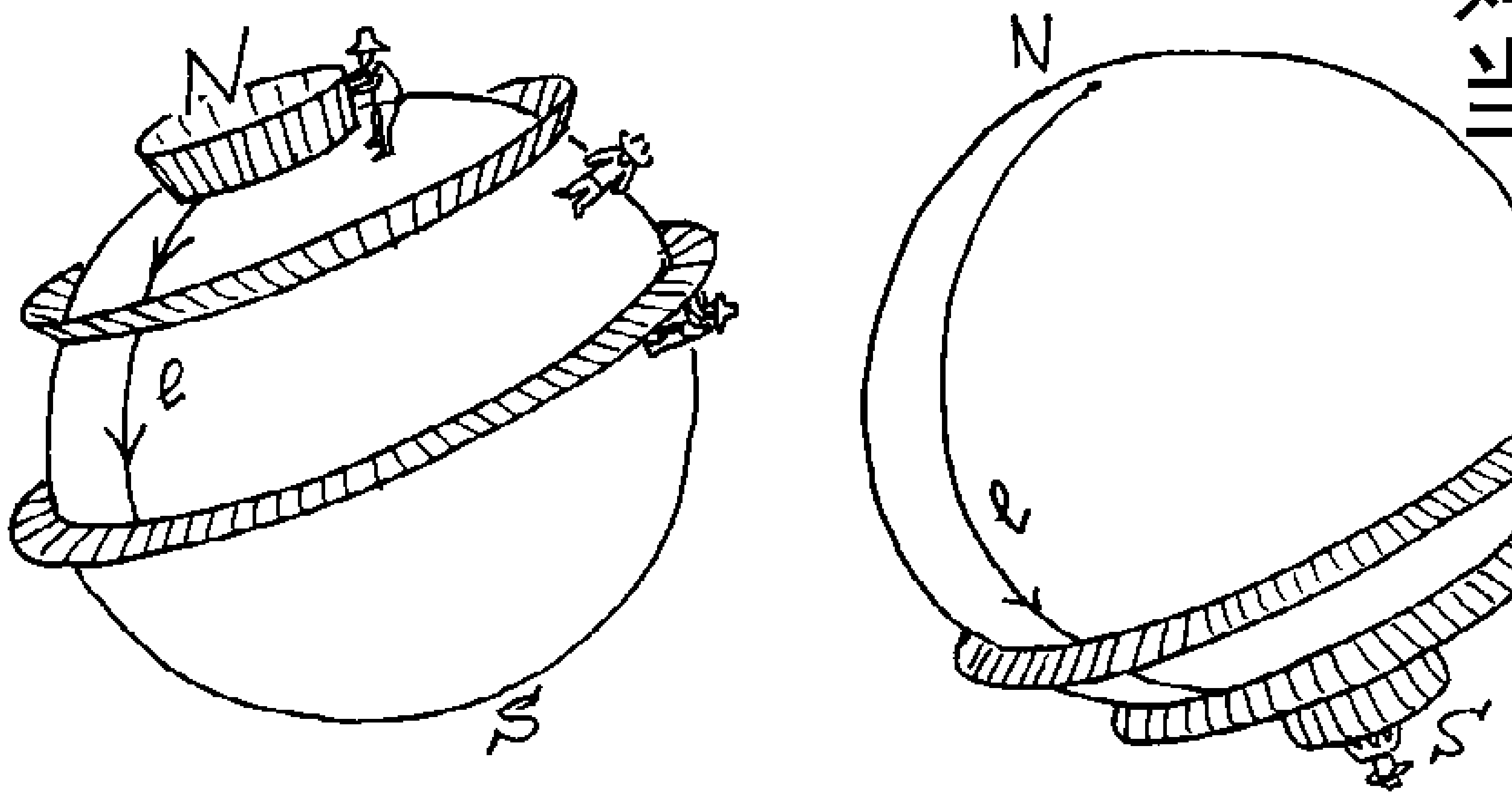
假如他没有及时把太空气关掉的话，他就可能被压死在气球里了。就像之前他被关在铁丝圈里一样。

但是，无论用什么方式，我们都不能用图像表示这个三维空间城里的一根可以头尾相连的直线来，而且，这个空间的体积也是一定的。就像我们的地球表面是个封闭的面，它的表面积也是一定的。

这个三维空间里的一个三角行三内角之和大于180°要像看到这个三角形，就要想象我们在一个四位空间里。

我们总是可以说我们生活的三维空间是一个“超平面”，它在一个四维空间里扩展，而这个四维空间又在一个五维空间扩展……当然，很多人都不能想像这一切。

让我们回顾一下昂赛姆在球体城的经历：当他把铁丝圈的半径增大的时候，他最终把自己关在了这个圆圈里面。

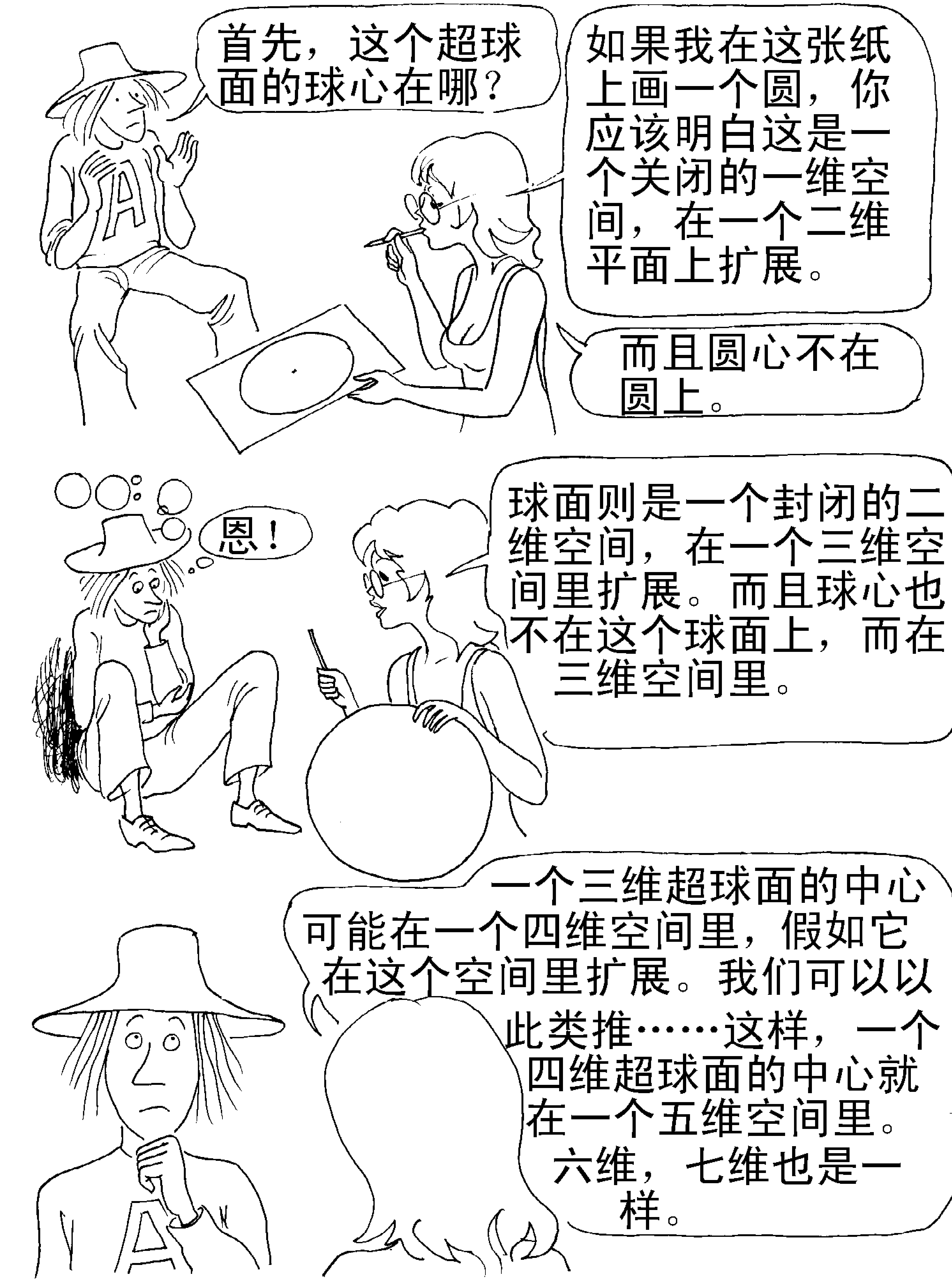


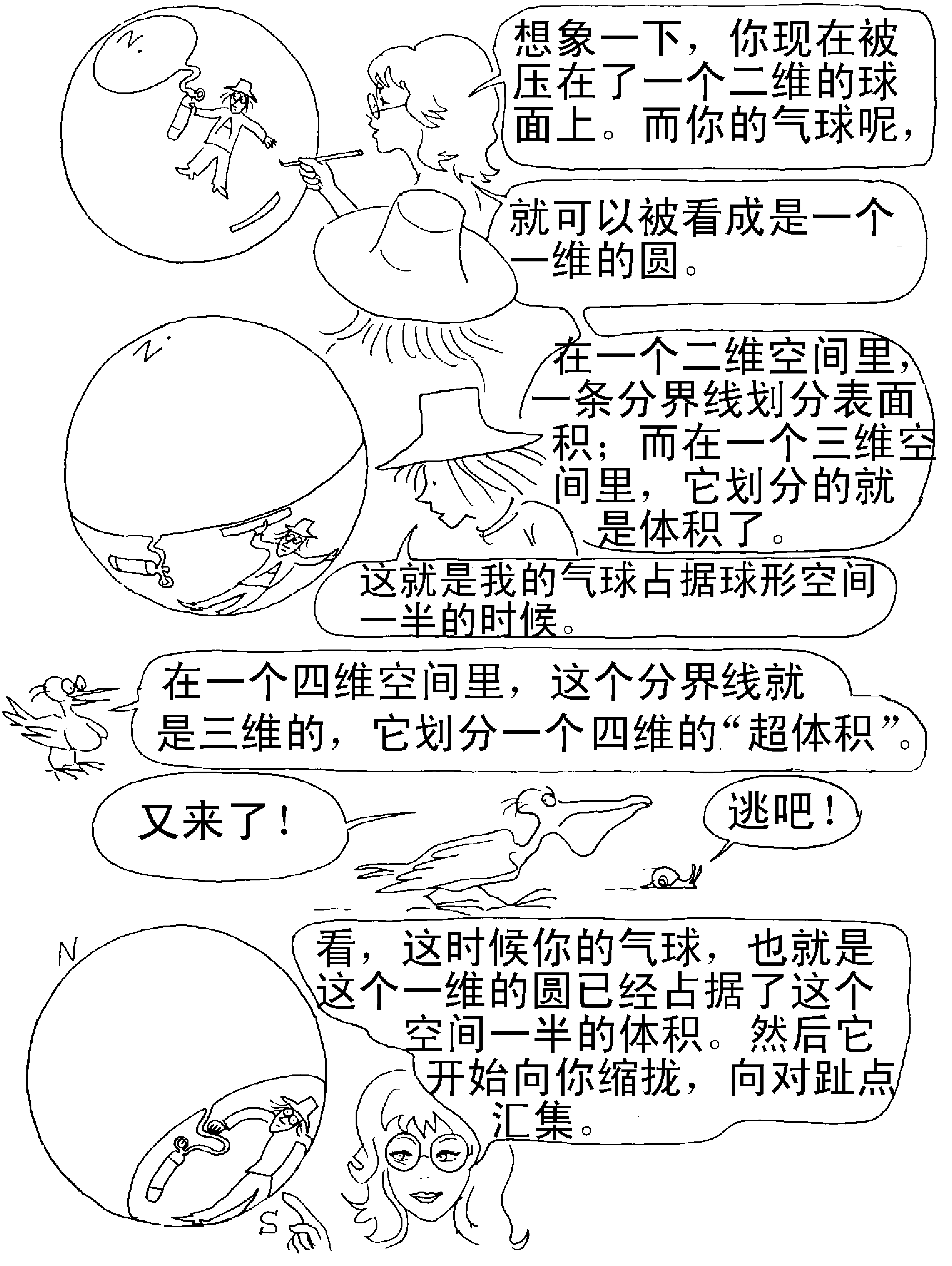
而赤道把球面这个二维空间平分开来。

其实在一个曲度为正的三维空间里，也是一样的。在这个三维的超球面上，也存在一个“赤道”，把这个空间平分成两半。在二维球面上，昂赛姆发现这根赤道是一条“直线”；而在这个三维空间里，当昂赛姆的气球占了所在空间的一半的时候，气球的表面就成了一个“平面”。再继续充气的时候，球面就往反方向凹，同时向球心缩拢。

在一个二维球面上，每个点都有一个对跖点；在一个三维超球面上也是一样，虽然这看起来有点难懂。

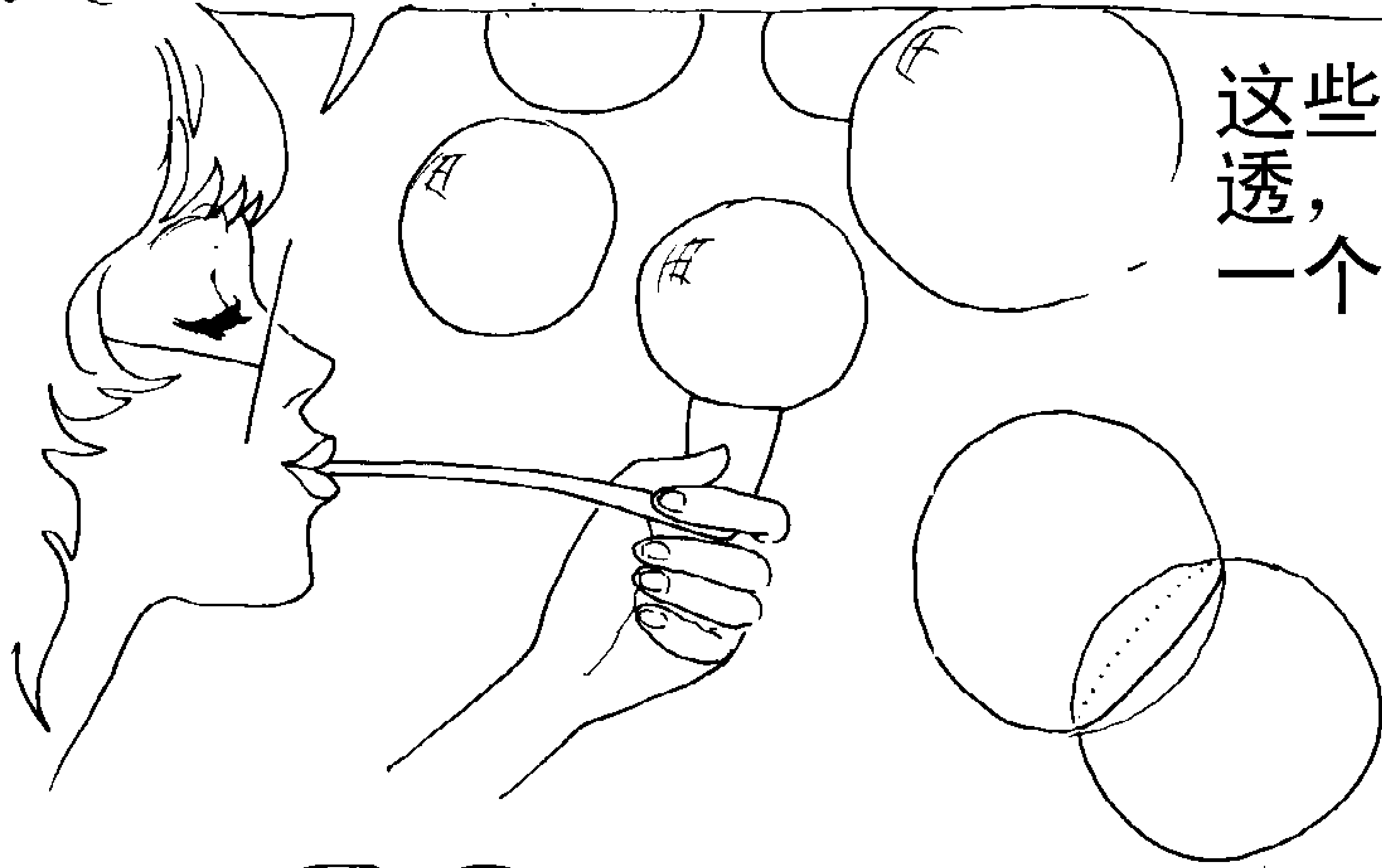

有难题吗？
所有学的这些都挤在我脑子，好混乱……我脑子都要炸了！
我叫索菲，让我帮你更简单地认识各式曲面。
在这些超球面上转几圈之后，初学者都是头晕脑转的。要慢慢来，才能更好地掌握。
恩！
我都不知道自己是谁了


首先，这个超球面的球心在哪？
如果我在这张纸上画一个圆，你应该明白这是一个关闭的一维空间，在一个二维平面上扩展。
而且圆心不在圆上。
恩！
球面则是一个封闭的二维空间，在一个三维空间里扩展。而且球心也不在这个球面上，而在三维空间里。
一个三维超球面的中心可能在一个四维空间里，假如它在这个空间里扩展。我们可以以此类推……这样，一个四维超球面的中心就在一个五维空间里。六维，七维也是一样。

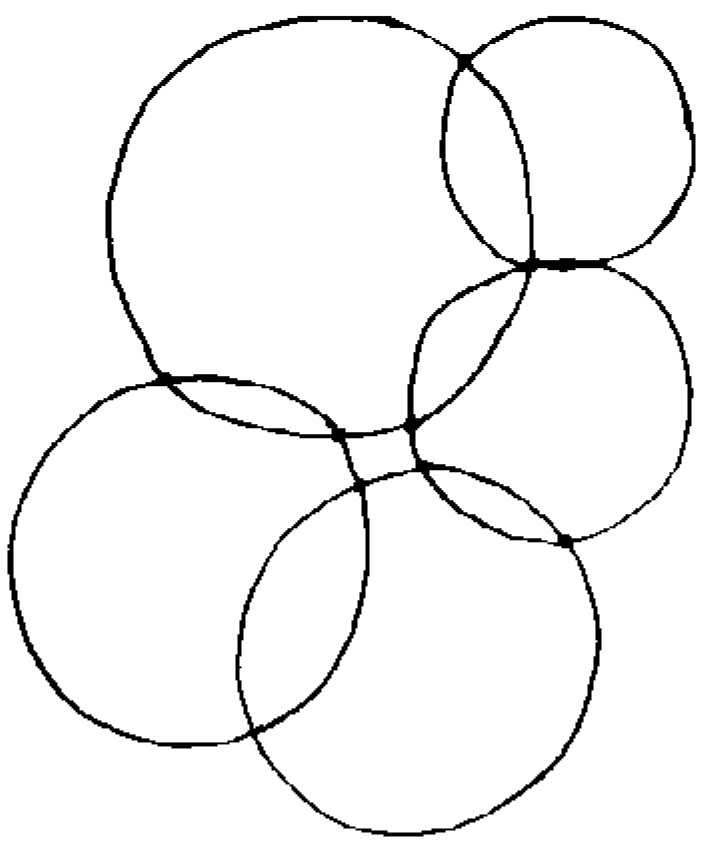

想象一下，你现在被压在了一个二维的球面上。而你的气球呢，
就可以被看成是一个一维的圆。
在一个二维空间里，一条分界线划分表面积；而在一个三维空间里，它划分的就是体积了。
这就是我的气球占据球形空间一半的时候。
在一个四维空间里，这个分界线就是三维的，它划分一个四维的“超体积”。
又来了！
逃吧！
看，这时候你的气球，也就是这个一维的圆已经占据了这个空间一半的体积。然后它开始向你缩拢，向对跐点汇集。
N
S


同样的，在这个弯曲的三维空间里，当气球的体积大于总体积一半的时候，它就会往回缩，向出发点的对趾点汇集。
A
我懂了！
因为一个球面在这个特殊的三维空间里，自然就有两个中心，而且它们是对趾点。
?!!?
其实，我也不知道我是否懂了，但我觉得好像懂了一些什么。
郁闷！
不要慌，小昂！当空间维数大于三的时候，理解，就是**推理**。
这就是推理！
图形……要你在脑子里画……

现在我在这个三维的空间里吹很多泡泡，这样，
它们就代表很多二维球面。



这些泡泡相互渗透，交接线就是一个一维的圆。



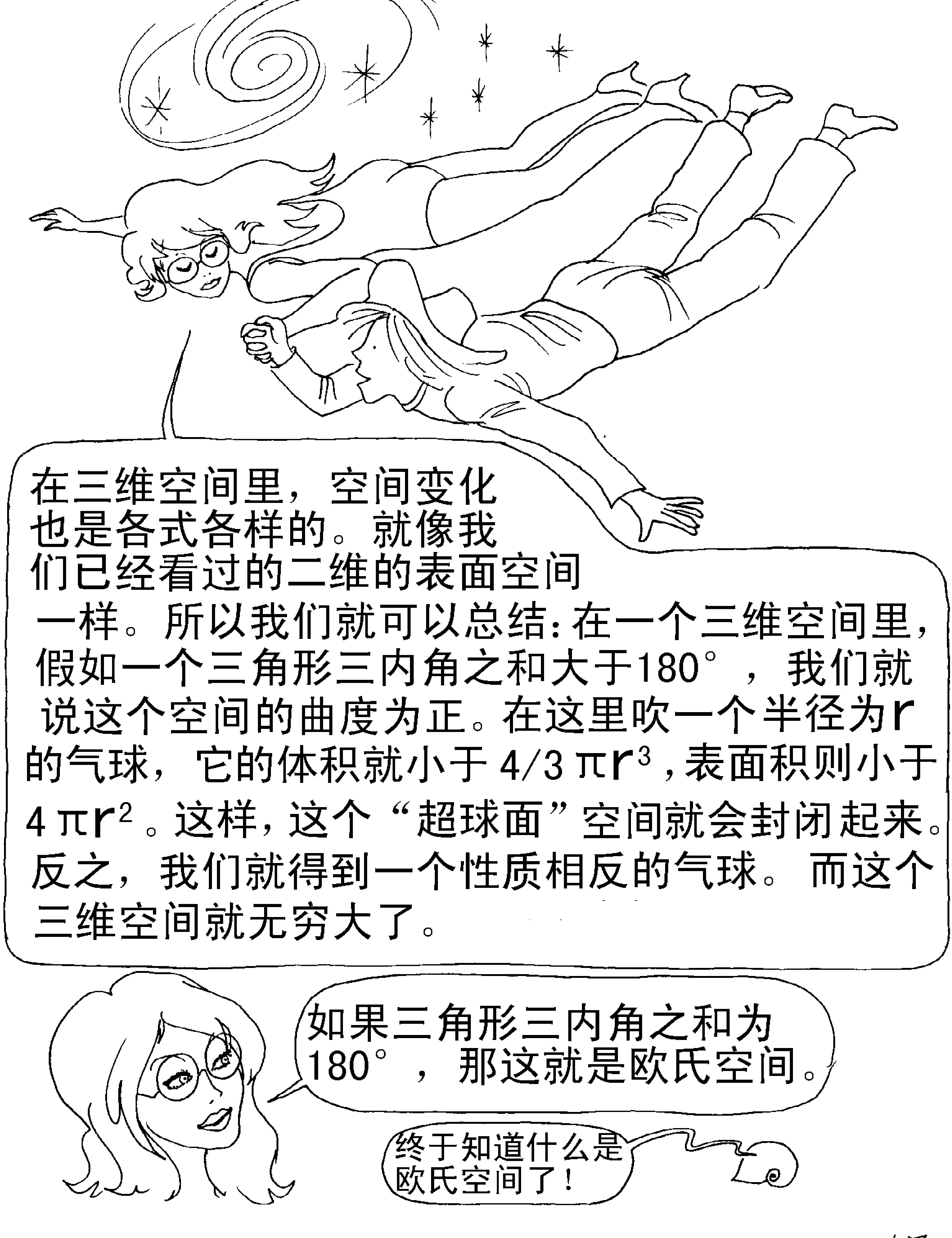
就像画在纸上（二维）的一维的圆一样，它们之间的相交的地方就是一些点。
习惯上，我们认为点的维数为零。

这样，我们就可以把一个二维的球面想象成是两个弯曲的三维球形空间在四维空间里的交界面。

以此类推，这个三维“超球面”也就是两个四维球面在五维空间里的交界面。

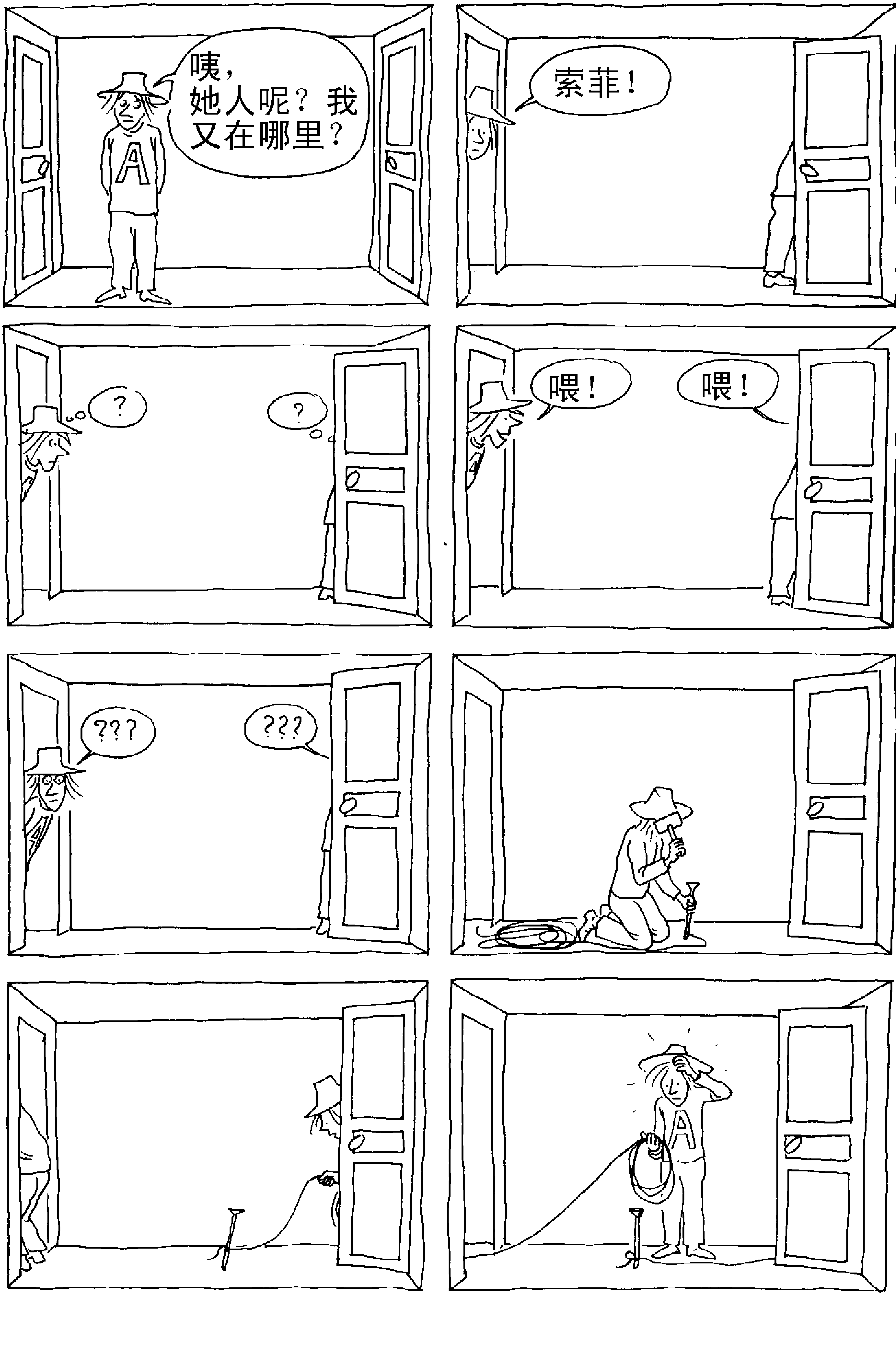

经过所有这些鬼斧神工的推理之后，昂赛姆和索菲又开始对新的三维空间进行探索。
如今，数学已面目全非了！
你看，这是个测地的三维立体胶带。带胶的部分自然就在末端。
又有新情况了，在这个三维空间里，当我往气球里冲“太空气”的时候，气体流量要大于$4/3\pi r^3$；表面积也大于$4\pi r^2$；而三角形三内角之和，这次则小于180°。
再看看23页！你现在又在一个负曲度的空间里了。

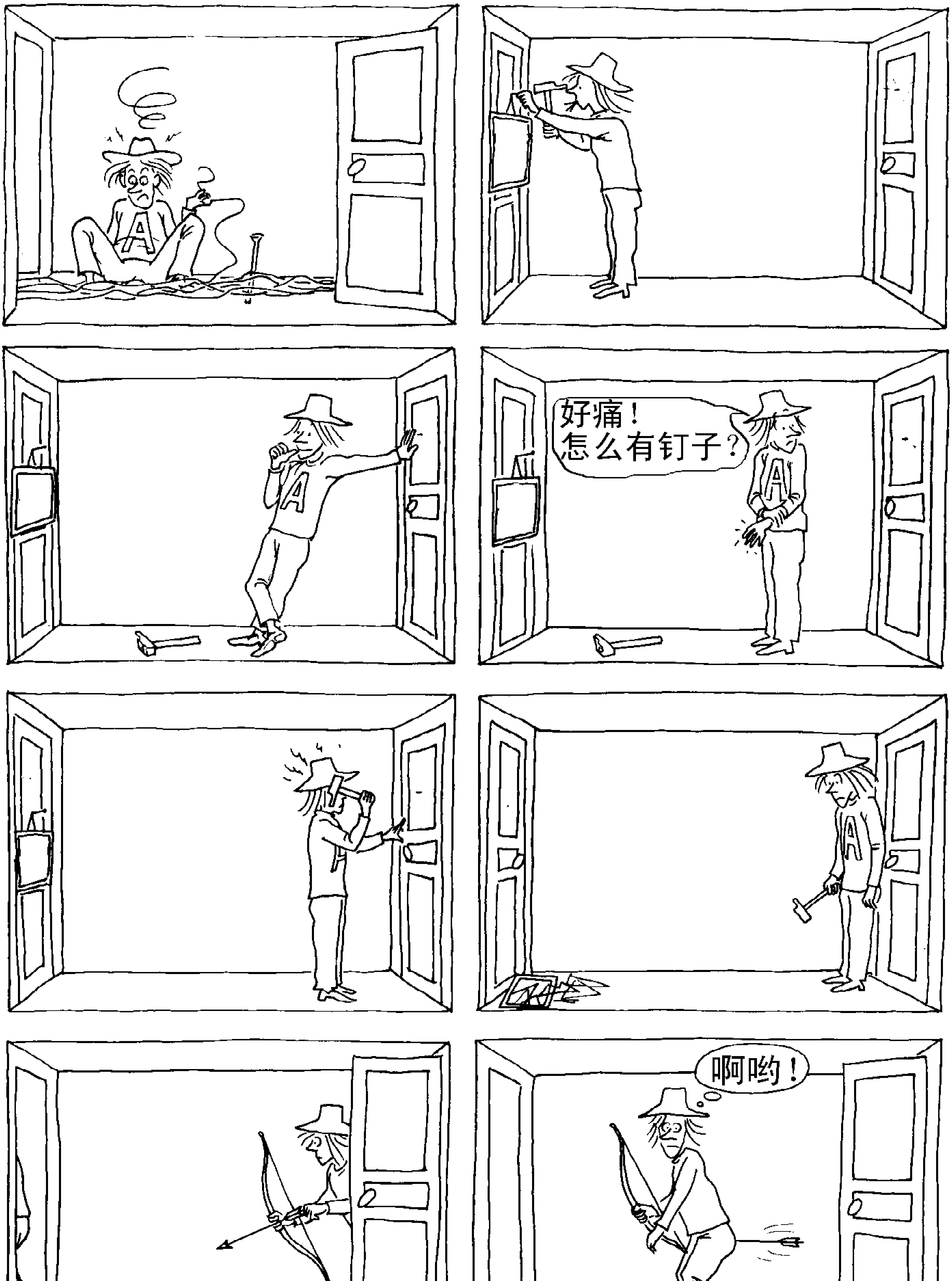
小结


在三维空间里，空间变化也是各式各样的。就像我们已经看过的二维的表面空间一样。所以我们就可以总结：在一个三维空间里，假如一个三角形三内角之和大于180°，我们就说这个空间的曲度为正。在这里吹一个半径为r的气球，它的体积就小于$4/3\pi r^3$，表面积则小于$4\pi r^2$。这样，这个“超球面”空间就会封闭起来。反之，我们就得到一个性质相反的气球。而这个三维空间就无穷大了。
如果三角形三内角之和为180°，那这就是欧氏空间。
终于知道什么是欧氏空间了！

敞开或封闭的空间


我想现在我都懂了，当一个三维空间的曲度为正的时候，它就是封闭的。
负曲度空间或欧氏空间则是无穷大的。
不过，小昂，几何王国比你想象的更神奇……


咦，
她人呢？我
又在哪里？
索菲！
?
?
喂！
喂！
???
???


好痛！
怎么有钉子？
啊呦！

啊，原来昂赛姆在一个圆柱形的三维空间里。
虽然这也是个欧氏空间，三角形三内角之和为180°，没有曲度，但这也是个封闭空间。
球形空间、抛物线形空间、圆柱形空间。都讲遍了吧？
你认为呢？
再让我们回到二维空间去！
啊？

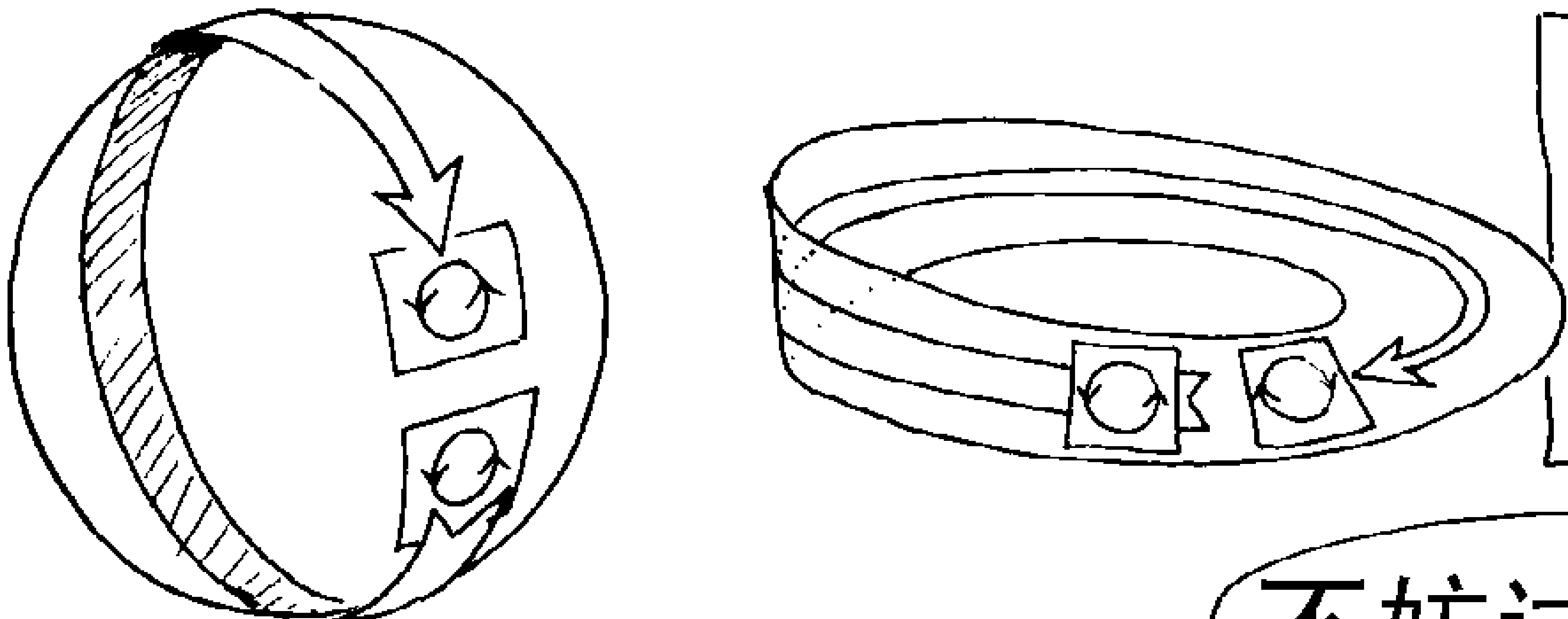
上下面


亲爱的昂赛姆：
这是一只经过训练的蜗牛！蒙上它的眼睛，它只会笔直地往前爬。这样，它就能爬出一条完美的测地线来。
再见！ 索菲
开始吧！
起点
笔直地往前走，或者随着两点之间的最短路线走是一样的吗？
咦，它爬哪里去了？
勇往直前！

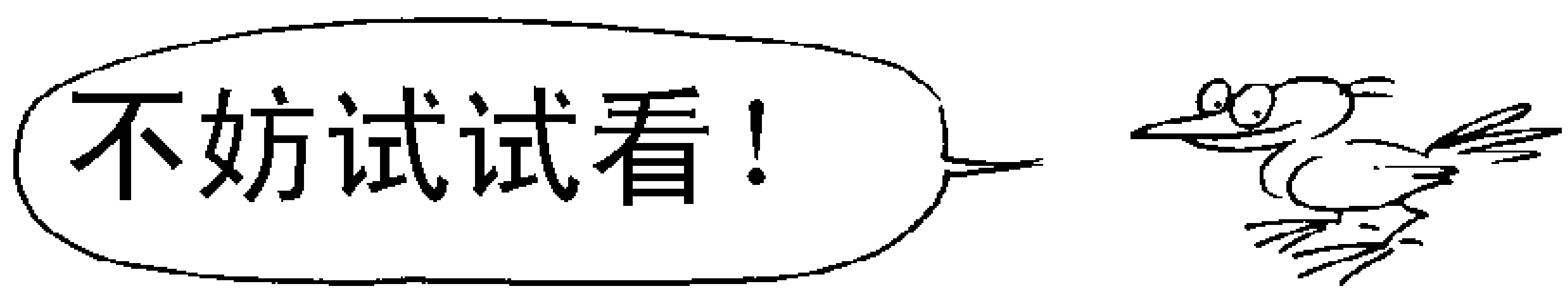

又回到起点了！
三内角之和：180°。难道又是一个圆柱体？
!?!
起点
这次你脚下的面，是一个没有方向的二维空间。最有名的代表空间就是莫比乌斯带（1893）。连博学的希腊人也没有想到这样的空间。
索菲，快让我出去！

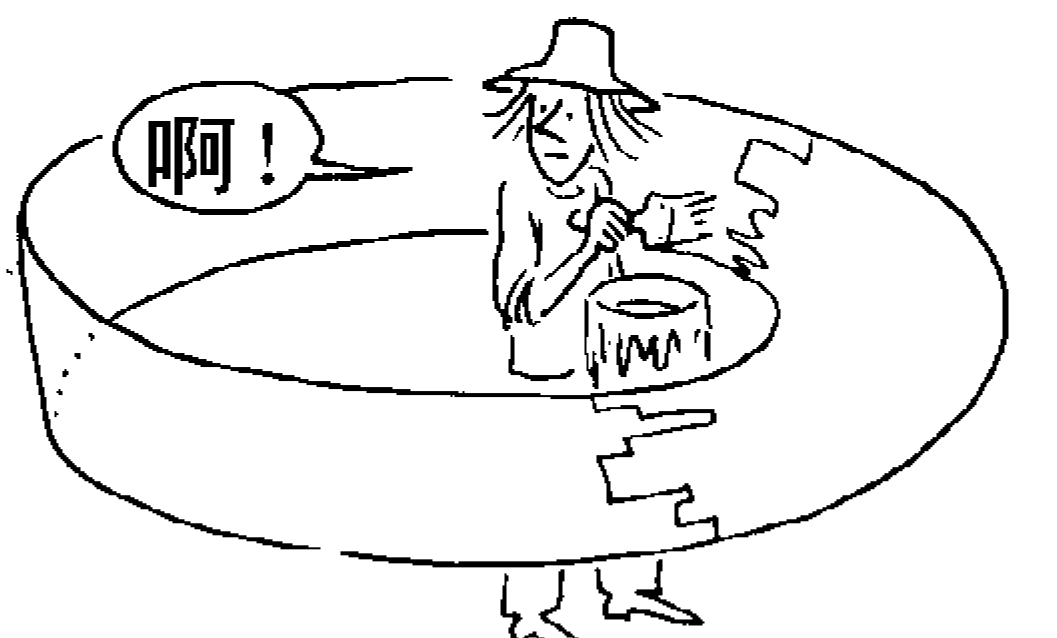
在纸条的表面画一个圆，然后如下图所示在上面标上箭头。接着我们把这个圆在纸条的表面移动。

假如两个箭头的方向不变，那么，我们就说这条纸条是可定向的（比如球面、圆柱面、平面，都是可定向面。）但莫比乌斯带就不同了。



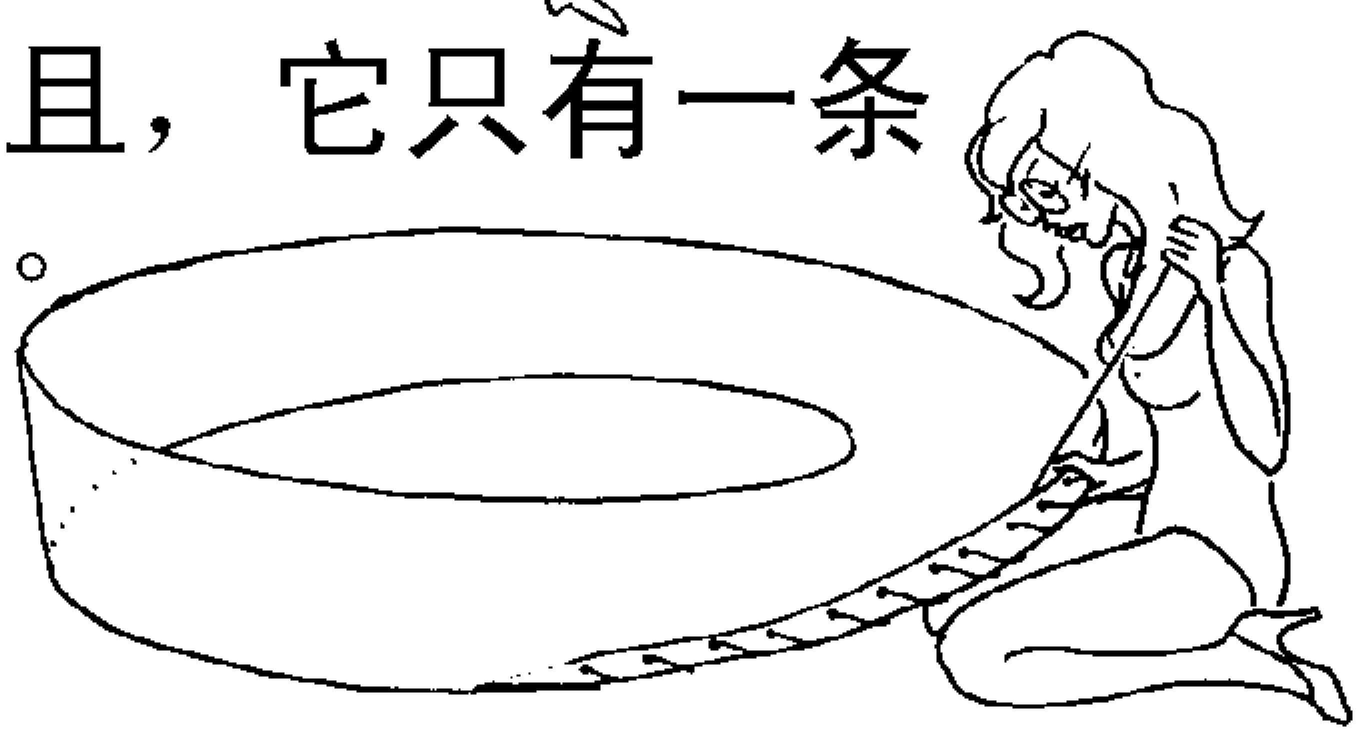
每当它绕这个二维纸带移动一周的时候，箭头就会转向。



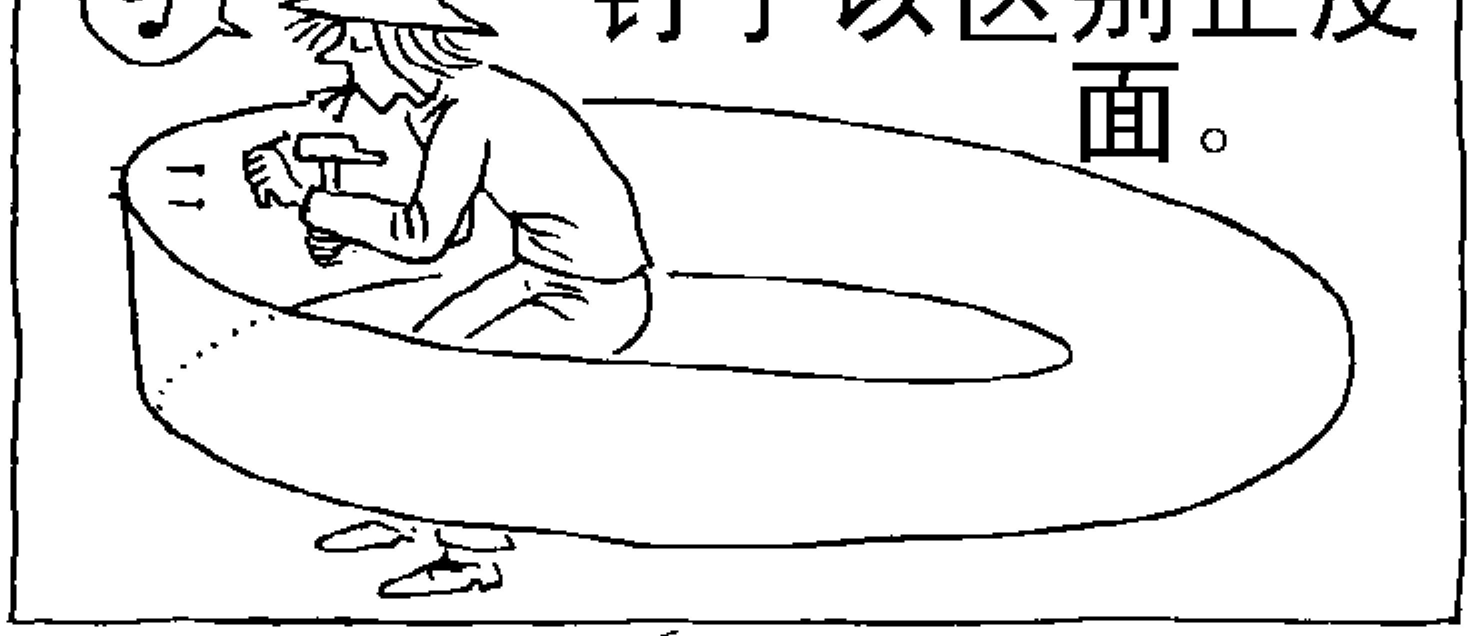


相应地，我们不能给一条莫比乌斯带涂上两种颜色，因为它只有一个面，也就是说它是**单面**的。

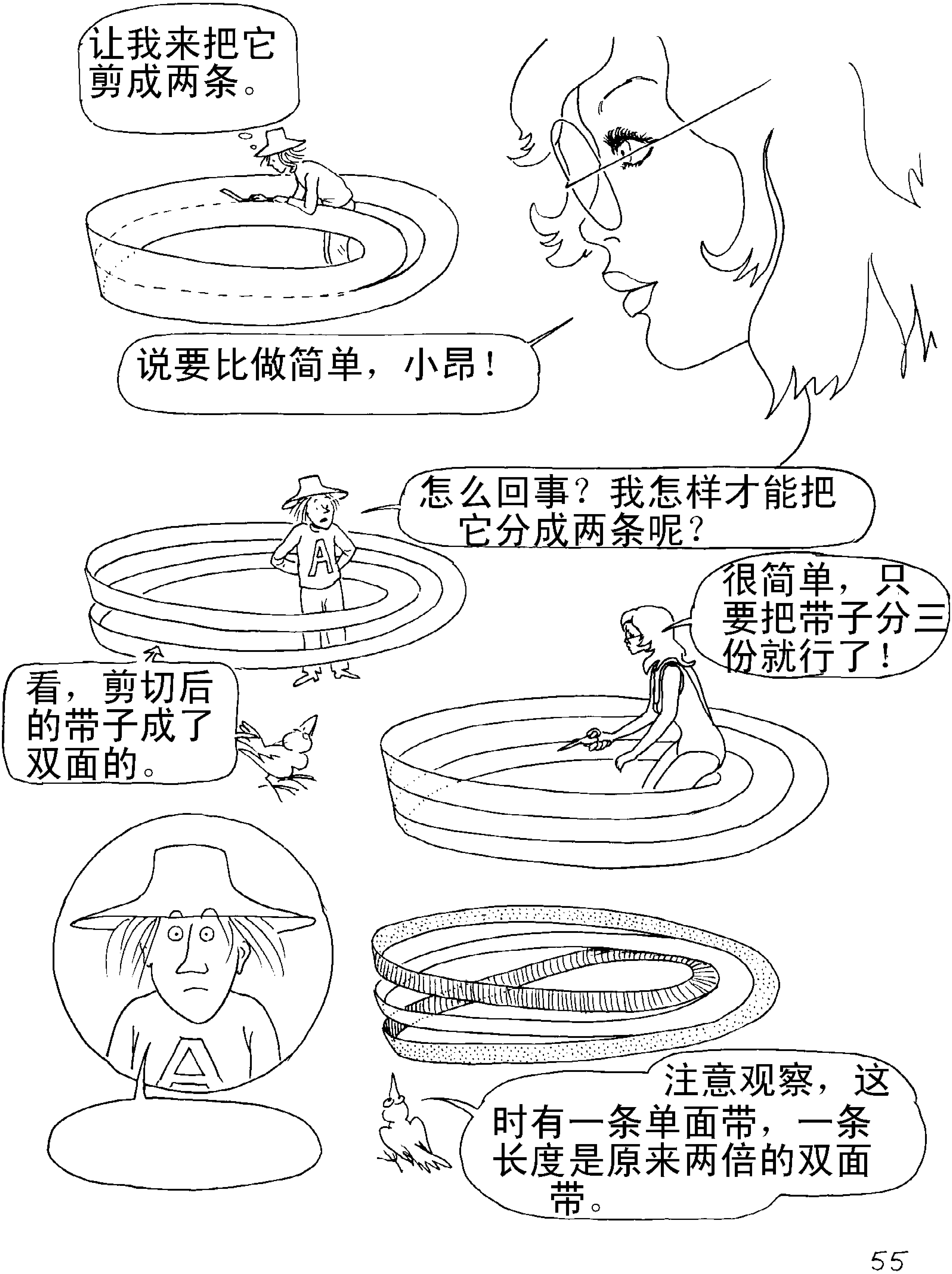
而且，它只有一条边。



昂赛姆决定在带子上钉上钉子以区别正反面。

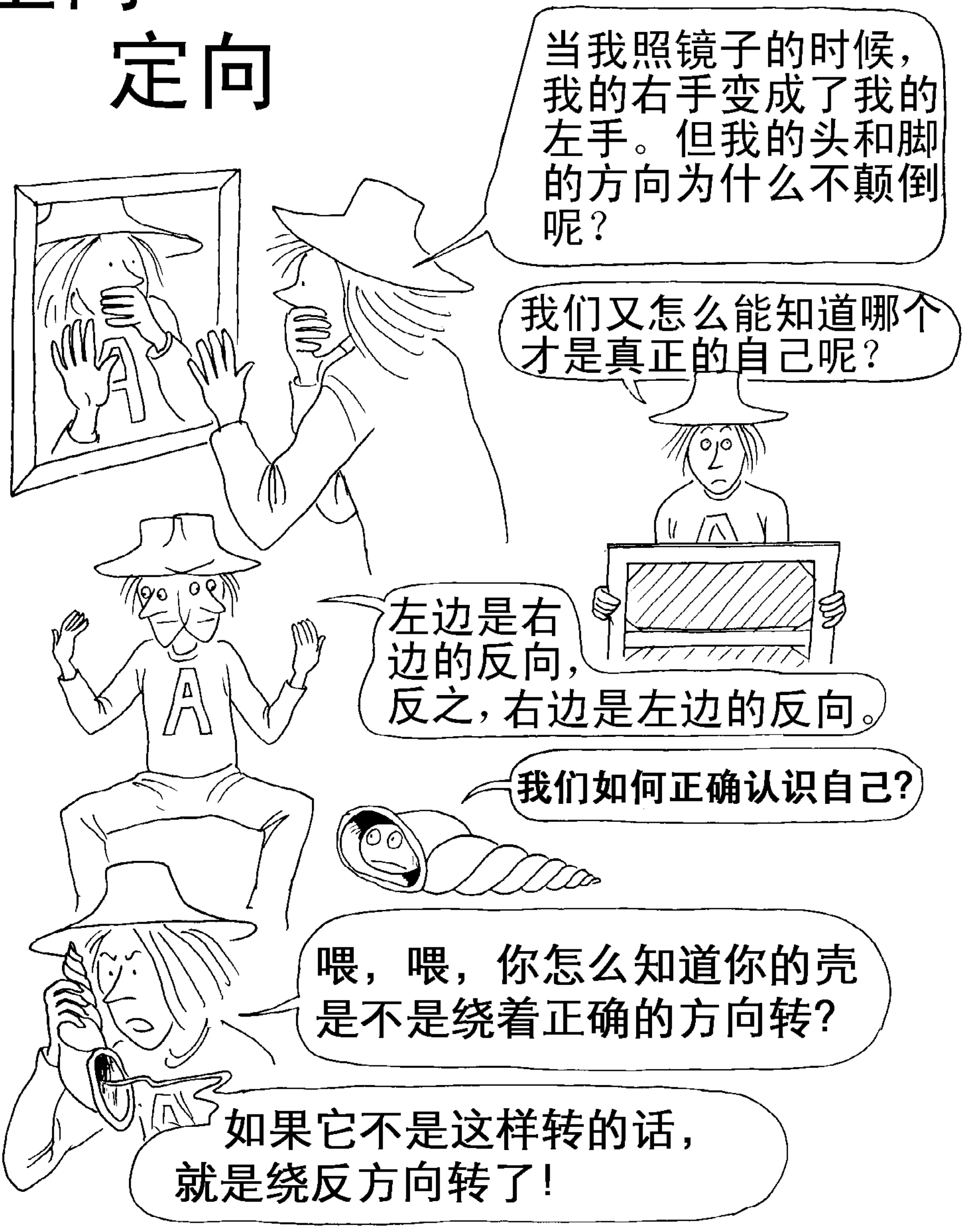


最后……


让我来把它剪成两条。
说要比做简单，小昂！
怎么回事？我怎样才能把它分成两条呢？
很简单，只要把带子分三份就行了！
看，剪切后的带子成了双面的。
注意观察，这时有一条单面带，一条长度是原来两倍的双面带。

在这条莫比乌斯带上散了散步之后，让我们再回到三维的欧式空间。

空间定向

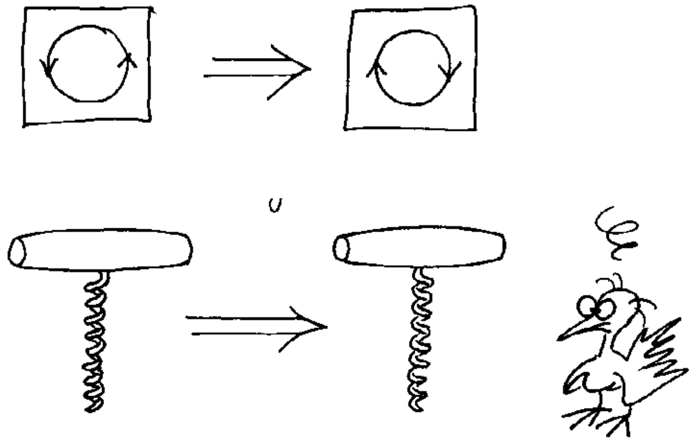


让我们和昂赛姆再来探索一个新的三维欧几里德空间。

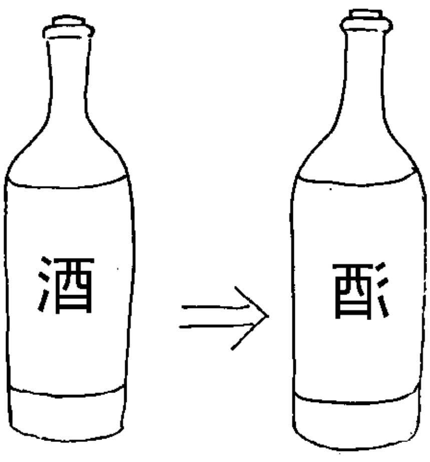

喂！
我在这！
让我来做几个测试。
三内角是180度。
表面积$4\pi r^2$ 体积$4/3\pi r^3$ 很好！
这是个欧几里德空间。
咦，我的酒怎么在这里？
怎么打不开啊？这个开瓶器怎么了？
但是它没坏啊！
它到底怎么了？
看仔细！
要帮忙吗？
呃，我……


这只是一瓶很普通的酒啊！
酉
有开酒器吗？
嗯，有！
酉
让世上所有的袋鼠一起手牵手
您没有发现什么不正常的情况吗？
你看起来是有点不正常。
吃几粒阿司匹林药片吧！
再见！
乓
乓
乓
乓
我的开酒器不知不觉变了形，一只酒鬼袋鼠喝完了我的酒。真是怪事！
啊！
嗙
不管你了，扔了再买个新的。

三维莫比乌斯空间和二维的莫比乌斯带有着相同的性质。



这些物体好像都被照在镜子里一样，左右方向都相反了。就像那个画有箭头的圆圈，当昂赛在这个三维莫比乌斯空间走一圈的时候，左右也相反了。所以一直在原地的酒瓶和开酒器对他来说却是变了方向。但只要再环绕这个空间走一圈，一切就又恢复原样了（只要酒瓶还是原地不动）。



昂赛姆和袋鼠同住在这个三维空间，但分别在两个对峙点上，所以昂赛姆的左边就是袋鼠的右边，他的右边却是袋鼠的左边。

后记

一切都混淆起来了。再也没有左右，没有上下，没有前后了。我到底要去哪里啊？
测地线，小昂，要坚持沿着你生命的测地线走！
我永远也不相信这个世界有这么复杂。这一切只是数学家的胡思乱想而已！
而且这只是一本连环画。
我们为什么要担心这么多，假如我们生活在欧式空间。*
*这是1830年奥斯特洛格拉德斯基（Ostrogradsky）在圣彼得堡读了黎曼(Riemann)和罗巴切夫斯基（Lobatchevski）作品之后说的一句话。

假设我们的宇宙不是这样的……您能想象吗？这就是我们在学校里教孩子们的东西。
简直就是荒唐！
其实最重要的，还是我们的现实生活，我们要好好地活好我们的每一天，那才是最美好的
这一切背后又是什么呢？
物理，亲爱的！
我一定要把这一切搞清楚！
为了我们的理想，冲啊！
有人吗？


……假如我们生活的宇宙里的物质的密度都小于10^{-29}克每立方厘米的话……
?
……那么宇宙就会弯曲，这样它就会变得无穷大……
……但是，假如密度大于10^{-29}克每立方厘米的话……
!..
……那么宇宙就是一个超球体这样，它就会自我封闭起来……
也就是说，假如这个平均密度等于10^{-29}克每立方厘米的话，宇宙就是个欧式空间……
嗯
爱因斯坦博士我猜想对了吗？
嗯，对……
完


救命啊！这里有没有数学家？